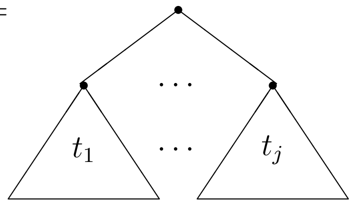
§2 Pumping Lemma (S. 44-48)

Lemma 2.2 Sei t ein endlicher Baum mit dem Verzweigungsgrad $\leq k$, in dem jeder Pfad die Länge $\leq m$ hat. Dann ist in t die Anzahl der Blätter $\leq k^m$.
Beweis: Induktion über $m \in \mathbb{N}$:

$m = 0$: t besteht nur aus $k^0 = 1$ Knoten.

$m \to m + 1$: t besitzt j Unterbäume $t_1, \ldots, t_j$ mit $j \leq k$, in denen die Pfade die Länge $\leq m$ haben:

$t =$



Nach Induktionsvoraussetzung ist für jeden der Unterbäume $t_1, \ldots, t_j$ die Anzahl der Blätter $\leq k^m$. Damit gilt in t:

$$\text{Anzahl der Blätter } \leq j \cdot k^m \leq k \cdot k^m = k^{m+1}.$$

Satz 2.1 Zu jeder kontextfreien Sprache $L \subseteq T^*$ existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass es für alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

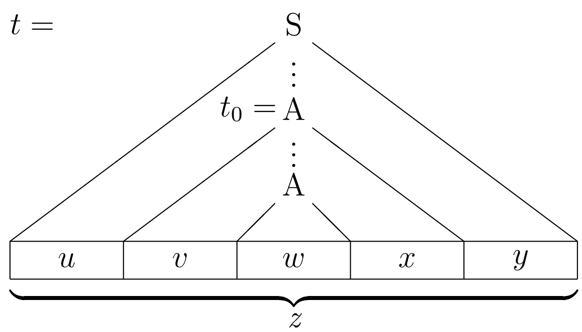
(i) $vx \neq \varepsilon$,

(ii) $|vwx| \leq n$,

(iii) für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iwx^iy \in L$.

Beweis: Sei G eine kontextfreie Grammatik (oBdA. in CNF) mit $L(G) = L$. Wir setzen $k = 2, m = |N|, n = k^{m+1}$. Sei jetzt $z \in L$ mit $|z| \geq n$. Dann gibt es einen Ableitungsbaum t von S nach z in G. Nach der Wahl von k und $|z|$ hat t einen Verzweigungsgrad $\leq k$ und $\geq k^{m+1}$ Blätter. Also gibt es nach dem vorangegangenen Lemma in t einen Pfad der Länge $\geq m+1$. Auf diesem Pfad liegen $\geq m+1$ innere Knoten, so dass es eine Wiederholung eines Nichtterminalsymbols bei der Beschriftung dieser Knoten gibt (Schubfachprinzip). Wir benötigen diese Wiederholung in einer speziellen Lage.

Unter einem *Wiederholungsbaum* in t verstehen wir einen Unterbaum von t, in dem sich die Beschriftung der Wurzel bei einem weiteren Knoten wiederholt. Wir wählen jetzt in t einen minimalen Wiederholungsbaum t_0, d.h. einen solchen, der keinen weiteren Wiederholungsbaum als echten Unterbaum enthält. In t_0 hat jeder Pfad eine Länge $\leq m + 1$.
Sei A die Wurzelbeschriftung von t_0. Dann hat t folgende Struktur:



Aus dieser Struktur erhalten wir eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit

$$S \vdash_G^* uAy \vdash_G^* uvAxy \vdash_G^* uvwxy. \qquad (*)$$

Wir zeigen, dass diese Zerlegung von z den Bedingungen des Pumping Lemmas genügt:

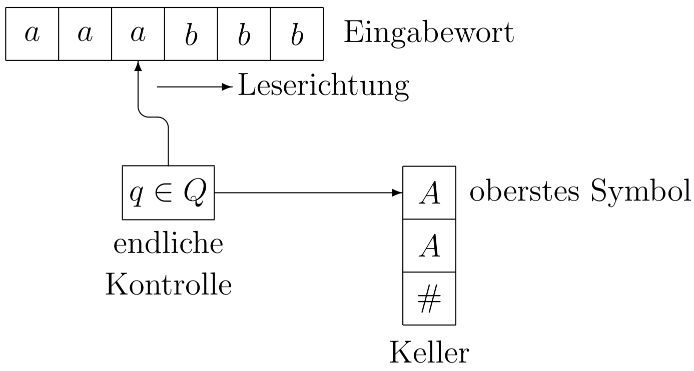
(i) $vx \neq \varepsilon$ (CNF).

(ii) Nach der Wahl von t_0 und dem vorangegangenen Lemma gilt $|vwx| \leq k^{m+1} = n$.

(iii) Aus $(*)$ folgt sofort, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iwx^iy \in L(G)$.

§3 Kellerautomaten (S. 49-58)

Erweiterung des ε-NEA um einen unbeschränkt großen Speicher mit eingeschränktem Zugriff: Keller/Stack (LIFO) mit Operationen *pop* und *push*
Bei jedem Schritt: pop, d.h. wenn man den Stack nicht verändern will, muss man wieder pushen



Def. 3.1 Ein (*nichtdeterministischer*) *Kellerautomat* (oder *Pushdown-Automat*), kurz KA (oder auch PDA), ist eine Struktur

$$\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Σ ist das *Eingabealphabet*,

(ii) Q ist eine endliche Menge von *Zuständen*,

(iii) Γ ist das *Kelleralphabet*,

(iv) $\rightarrow \subseteq Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \Gamma^*$ ist die *Transitionsrelation*,

(v) $q_0 \in Q$ ist der *Anfangszustand*,

(vi) $Z_0 \in \Gamma$ ist das *Startsymbol des Kellers*,

(vii) $F \subseteq Q$ ist die Menge der *Endzustände*.

typische Zeichen: $a, b, c \in \Sigma$, $u, v, w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $q \in Q$, $Z \in \Gamma$, $\gamma \in \Gamma^*$
Statt $(q, Z, \alpha, q', \gamma') \in\rightarrow$ schreiben wir meistens $(q, Z) \xrightarrow{\alpha} (q', \gamma')$.
Vorgehen: zuerst pop, dann Entscheidung ob ε oder Symbol lesen, dann Transition wählen, dann Zustand wechseln und push; stoppe bei leerem Stack oder keiner Transition

```
input w; // input word
global q := q0; // current state
global st := Z0; // stack
while (w ≠ ε)
    if (|st| == 0)
        stop();
```

```
Z := pop(s);
a := first(w);
transitions := →(q, Z, ε) ∪ →(q, Z, a);
if (|transitions| == 0)
    stop();
(q, Z, α, q', γ) := choose(transitions);
if (α ∈ Σ)
    pop(w);
q := q';
push(s, γ);
```

Def. 3.2 Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ ein KA.

(i) Unter einer *Konfiguration* von $\mathcal{K}$ verstehen wir ein Paar $(q, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$, das den momentanen Zustand q und den momentanen Kellerinhalt γ von $\mathcal{K}$ bescheibt.

(ii) Für jedes $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ist $\xrightarrow{\alpha}$ eine 2-stellige Relation auf den Konfigurationen von $\mathcal{K}$, die wie folgt definiert ist:

$$(q, \gamma) \xrightarrow{\alpha} (q', \gamma'), \text{ falls } \exists Z \in \Gamma, \quad \exists \gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma^* :$$

$$\gamma = Z\gamma_0 \text{ und } (q, Z, \alpha, q', \gamma_1) \in \rightarrow \text{ und } \gamma' = \gamma_1\gamma_0$$

(iii) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ ist $\overset{w}{\Rightarrow}$ eine 2-stellige Relation auf den Konfigurationen von $\mathcal{K}$, die induktiv definiert ist:

- $(q, \gamma) \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} (q', \gamma')$, falls $\exists n \geq 0 : (q, \gamma) \underbrace{\xrightarrow{\varepsilon} \circ \ldots \circ \xrightarrow{\varepsilon}}_{n \text{ Mal}} (q', \gamma')$
- $(q, \gamma) \overset{aw}{\Rightarrow} (q', \gamma')$, falls $(q, \gamma) \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \circ \xrightarrow{a} \circ \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma')$, für alle $a \in \Sigma$.

zwei Varianten von Sprach-Akzeptanz:
Def. 3.2 Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ ein KA und $w \in \Sigma^*$.

(i) $\mathcal{K}$ *akzeptiert* w, falls $\exists q \in F \quad \exists \gamma \in \Gamma^* : \quad (q_0, Z_0) \overset{w}{\Longrightarrow} (q, \gamma)$.
Die von $\mathcal{K}$ *akzeptierte* (oder *erkannte*) *Sprache* ist

$$L(\mathcal{K}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{K} \text{ akzeptiert } w\}.$$

(ii) $\mathcal{K}$ *akzeptiert w mit dem leeren Keller*, falls

$$\exists q \in Q : \quad (q_0, Z_0) \overset{w}{\Longrightarrow} (q, \varepsilon).$$

Die von $\mathcal{K}$ mit leerem Keller akzeptierte (oder erkannte) Sprache ist

$$L_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{K} \text{ akzeptiert } w \text{ mit leerem Keller }\}.$$

Bsp.: $L = \{a^n b^n\}$. Setze $\mathcal{K} = (\{a,b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{A, Z\}, \rightarrow, q_0, Z, \{q_0\})$ mit

$$\begin{array}{lccc}
(1) & (q_0, Z) & \xrightarrow{a} & (q_1, AZ) \\
(2) & (q_1, A) & \xrightarrow{a} & (q_1, AA) \\
(3) & (q_1, A) & \xrightarrow{b} & (q_2, \varepsilon) \\
(4) & (q_2, A) & \xrightarrow{b} & (q_2, \varepsilon) \\
(5) & (q_2, Z) & \xrightarrow{\varepsilon} & (q_0, \varepsilon)
\end{array}$$

Lemma 3.4 (Top des Kellers) Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ ein Kellerautomat. Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$, $q, q' \in Q$, $Z \in \Gamma$ und $\gamma \in \Gamma^*$:

$$\text{wenn } (q, Z) \stackrel{w}{\Longrightarrow} (q', \varepsilon), \text{ so auch } (q, Z\gamma) \stackrel{w}{\Longrightarrow} (q', \gamma).$$

Satz 3.5

(1) Zu jedem KA $\mathcal{A}$ kann ein KA B mit $L(\mathcal{A}) = L_\varepsilon(B)$ konstruiert werden.

(2) Zu jedem KA $\mathcal{A}$ kann ein KA B mit $L_\varepsilon(\mathcal{A}) = L(B)$ konstruiert werden.

Bew.: Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow_{\mathcal{A}}, q_0, Z_0, F)$.
Zu (1): Die Beweisidee ist einfach: B arbeitet wie $\mathcal{A}$ und leert von Endzuständen aus den Keller. Es muss jedoch darauf geachtet werden, dass B keinen leeren Keller erhält durch Eingabewörter, die $\mathcal{A}$ nicht akzeptiert. Deshalb benutzt B ein zusätzliches Symbol # zur Markierung des Kellerbodens. Genauer konstruieren wir:

$$B = (\Sigma, Q \cup \{q_B, q_\varepsilon\}, \Gamma \cup \{\#\}, \rightarrow_B, q_B, \#, \emptyset)$$

mit $q_B, q_\varepsilon \notin Q$ und $\# \notin \Gamma$ und folgender Transitionsrelation:

$$\begin{array}{lll}
\rightarrow_B & = \{(q_B, \#, \varepsilon, q_0, Z_0\#)\} & \text{„Starten von } \mathcal{A}\text{“} \\
 & \cup \rightarrow_{\mathcal{A}} & \text{„Arbeiten wie } \mathcal{A}\text{“} \\
 & \left.\begin{array}{l} \cup \{(q, Z, \varepsilon, q_\varepsilon, \varepsilon) \mid q \in F, Z \in \Gamma \cup \{\#\}\} \\ \cup \{(q_\varepsilon, Z, \varepsilon, q_\varepsilon, \varepsilon) \mid Z \in \Gamma \cup \{\#\}\} \end{array}\right\} & \text{„Leeren des Kellers“}
\end{array}$$

Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*, q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$:

$$(q_0, Z_0) \stackrel{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} (q, \gamma)$$

gdw.

$$(q_B, \#) \xrightarrow{\varepsilon}_B (q_0, Z_0\#) \stackrel{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} (q, \gamma\#) \xrightarrow{\varepsilon}_B (q_\varepsilon, \varepsilon).$$

(Für die „wenn-dann“ - Richtung wird das Top - Lemma angewandt.) Mit einer Analyse der Anwendbarkeit der neuen Transitionen in B erhält man daraus $L(\mathcal{A}) = L_\varepsilon(B)$.

Zu (2): Beweisidee: B arbeitet wie $\mathcal{A}$, benutzt aber ein zusätzliches Symbol $\#$ zur Markierung des Kellerbodens. Sobald $\mathcal{A}$ seinen Keller geleert hat, liest B das Symbol $\#$ und geht in einen Endzustand über. Die genaue Konstruktion von B ist eine Übungsaufgabe.