



11. Übungsblatt zur Vorlesung Informatik III

Anmerkung: Undokumentierte Turingmaschinen zu verstehen ist ähnlich schwierig wie undokumentierten Programmcode zu verstehen. Immer wenn Sie eine Turingmaschine mit einer nicht offensichtlichen Funktionalität angeben, sollten Sie auch in Textform beschreiben, wie diese Turingmaschine funktioniert.

Aufgabe 1: Flussdiagramme

4 Punkte

Betrachten Sie das Alphabet der Striche $\Sigma = \{I\}$. Wir interpretieren Wörter aus Σ^* als Unärzahlen.

Geben Sie für diese Aufgabe jeweils Turingmaschinen als Flussdiagramme an. Verwenden Sie dabei \square als Blank.

- Geben Sie eine Turingmaschine \mathcal{M}_{++} an, die an eine beliebige Eingabe über dem Eingabealphabet $\{I, \#\}$ rechts I anhängt. Außerdem soll der Kopf zurück an die Ausgangsposition bewegt werden, sofern die Eingabe nicht leer war, und ansonsten auf das neu hinzugefügte I bewegt werden.
- Geben Sie eine Turingmaschine \mathcal{M}_{add} an, die zwei Unärzahlen, die durch $\#$ getrennt sind, einliest und die erste Zahl zur zweiten Zahl addiert. Die erste Zahl und das Trennzeichen sollen dabei stehenbleiben.
- Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{mult}}$ an, die zwei positive Unärzahlen, die durch $\#$ getrennt sind, multipliziert. Die Ausgabe soll nur das Resultat der Multiplikation sein.

Hinweis: Die unäre Null wird mit dem leeren Wort dargestellt. Beispielsweise ist das Wort $w = \#$ eine gültige Eingabe für \mathcal{M}_{add} .

Aufgabe 2: Mehrband-Turingmaschine

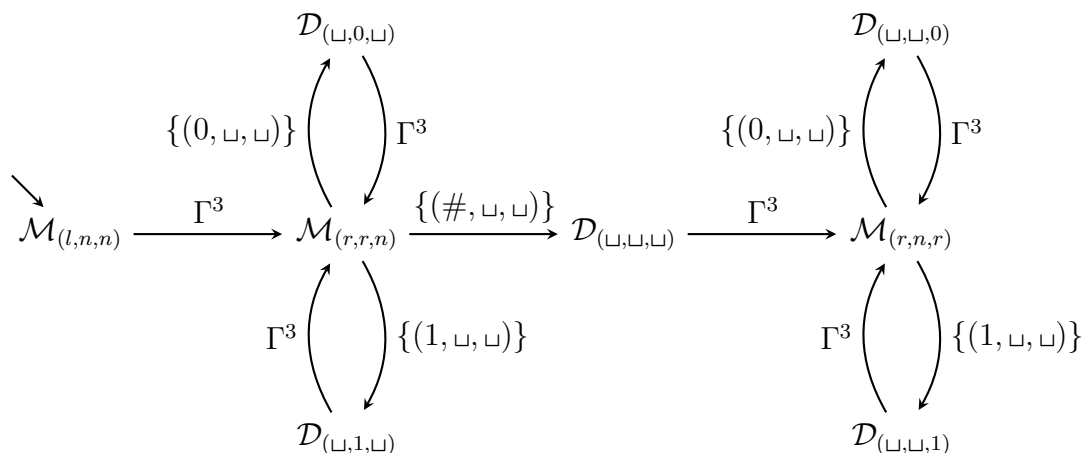
3 Punkte

Geben Sie eine 3-Band-Turingmaschine an, welche die Binäraddition nach der Schulmethode durchführt. Zu Beginn sollen die Operanden getrennt durch $\#$ auf Band 1 stehen. Verwenden Sie die Konvention, dass Binärzahlen mit dem niederwertigsten Bit rechts geschrieben werden. Zum Beispiel steht die Binärzahl 10 für die Dezimalzahl 2.

Wir verallgemeinern hierfür die Flussdiagrammschreibweise auf k -Band-Turingmaschinen, indem wir an jede Kante statt einer Menge von Bandsymbolen eine Menge von k -Tupeln von Bandsymbolen schreiben.

Weiterhin führen wir die folgenden Verallgemeinerungen von Turingmaschinen aus der Vorlesung für drei Bänder ein: $\mathcal{D}_{(x_1, x_2, x_3)}$ ist die Druckmaschine, die auf Band i das Zeichen x_i schreibt. $\mathcal{M}_{(d_1, d_2, d_3)}$ ist die 1-Schritt-Maschine, die auf Band i einen Schritt in Richtung d_i macht, wobei l, r, n jeweils für „links“, „rechts“ oder „stehen bleiben“ steht.

Beispiel: Das folgende Flussdiagramm beschreibt eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{copy}}$, welche die Operanden auf die Bänder 2 und 3 verteilt, Band 1 leert und die Köpfe jeweils auf das erste Blank rechts von den Operanden bewegt.



Ihre Lösung sollte $\mathcal{M}_{\text{copy}}$ verwenden.

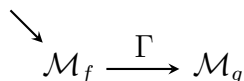
Hinweis: Beachten Sie, dass die Operanden nicht die gleiche Länge haben müssen.

Aufgabe 3: Hintereinanderausführung von Funktionen

2 Punkte

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Seien \mathcal{M}_f und \mathcal{M}_g zwei deterministische TMs mit Bandalphabet Γ . Sei $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ die von \mathcal{M}_f berechnete Funktion. Sei $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ die von \mathcal{M}_g berechnete Funktion.

Sei \mathcal{M}_h die vom folgenden Flussdiagramm beschriebene TM und $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ die von \mathcal{M}_h berechnete Funktion.



Ist h die Hintereinanderausführung von f und g , d.h., gilt für alle $w \in \Sigma^*$, dass $g(f(w)) = h(w)$? Zeigen Sie diese Behauptung oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4: Eigenschaften von Funktionen

1 Punkt

Aus Ihrem bisherigen Studium kennen Sie bereits die folgenden Definitionen: Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt

- *injektiv*, wenn gilt: $\forall x \in X, y \in Y : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,
- *surjektiv*, wenn gilt: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$,
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die

- Weder injektiv noch surjektiv ist,
- injektiv aber nicht surjektiv ist,
- surjektiv aber nicht injektiv ist,
- bijektiv ist.