Prof. Dr. Andreas Podelski
Dominik Klumpp

Abgabe bis Montag, 8. Mai 2023
16:00 Uhr via ILIAS
Besprechung: 16./17. Mai 2023

Übungen zu Theoretische Informatik
Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Teilbarkeit durch 2 — 3 Punkte

Diese Aufgabe illustriert, wie endliche Automaten arithmetische Probleme lösen können.

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der genau die Binärdarstellungen aller geraden natürlichen Zahlen akzeptiert.

Ihr Automat soll eine gegebene Zahl in Binärdarstellung "vorwärts", also mit der bedeutendsten Ziffer zuerst, lesen. Wir erlauben führende Nullen, d.h. 0010 ist eine erlaubte Eingabe und sollte akzeptiert werden (da die Zahl 2 gerade ist).

Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm für Ihren Automaten, und geben Sie den Automaten zusätzlich als 5-Tupel $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ an. Beschreiben Sie dabei die Übergangsfunktion δ mithilfe einer Tabelle.

Aufgabe 2: Teilbarkeit durch 3 2+4+3 Punkte

Hier üben Sie, Automaten für nicht-triviale (arithmetische) Probleme zu konstruieren.

In dieser Aufgabe geht es um die Teilbarkeit von Binärzahlen durch 3. Die Binärdarstellung wird dabei entweder “vorwärts”, d.h. mit der bedeutendsten Ziffer zuerst, oder “rückwärts” gelesen.

Hinweis: Sie dürfen für diese Aufgabe benutzen, dass für alle natürlichen Zahlen n, m, k mit $k \geq 1$ gilt:

$$(n+m) \bmod k = ((n \bmod k) + (m \bmod k)) \bmod k$$
$$(n \cdot m) \bmod k = ((n \bmod k) \cdot (m \bmod k)) \bmod k$$

(a) Beweisen Sie per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $2^{2n} \bmod 3 = 1$ und $2^{2n+1} \bmod 3 = 2$.

(b) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der genau die Binärdarstellungen aller natürlichen Zahlen akzeptiert, die durch 3 teilbar sind.

Ihr Automat soll eine gegebene Zahl in Binärdarstellung “rückwärts”, also mit der unbedeutendsten Ziffer zuerst, lesen. Geben Sie Ihren Automaten als Zustandsdiagramm an.

Hinweis: Die Aussagen aus (a) können hier hilfreich sein, und führen zu einem Automaten mit 6 Zuständen. Es existiert aber auch eine Lösung mit nur 3 Zuständen.

(c) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der genau die Binärdarstellungen aller natürlichen Zahlen akzeptiert, die durch 3 teilbar sind.

Ihr Automat soll eine gegebene Zahl in Binärdarstellung “vorwärts”, also mit der bedeutendsten Ziffer zuerst, lesen. Wir erlauben führende Nullen. Geben Sie Ihren Automaten als Zustandsdiagramm an.