Prof. Dr. Andreas Podelski
Dominik Klumpp

Abgabe bis Montag, 19. Juni 2023
16:00 Uhr via ILIAS
Besprechung: 27./28. Juni 2023

Übungen zu Theoretische Informatik
Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Nicht reguläre Sprachen 3+3 P

In dieser Aufgabe wenden Sie die zwei gängigsten Beweisverfahren für Nichtregularität an.

(a) Die Sprache der *Palindrome* über dem zweibuchstabigen Alphabet $\{a, b\}$ ist wie folgt definiert:

$$L_1 = \{w_0 w_1 \dots w_n \in \{a, b\}^* \mid \text{für alle } i = 0, \dots, n \text{ gilt } w_i = w_{n-i}\}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass diese Sprache nicht regulär ist.

Nehmen Sie dazu an, dass L_1 regulär sei und dementsprechend das Pumping Lemma erfüllte, und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Myhill und Nerode, dass die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht regulär ist:

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } k < j, \text{ für } i, j, k \in \mathbb{N}\}$$

Geben Sie dazu eine unendliche Menge von Wörtern an, und zeigen Sie, dass je zwei Wörter aus Ihrer gewählten Menge bzgl. der Relation $\equiv_{L_2}$ niemals äquivalent sind.

Aufgabe 2: Die $\equiv_A$-Äquivalenz 3 P

In dieser Aufgabe untersuchen Sie die Rechtskongruenz für NEAs.

Für den Beweis des Satzes von Nerode wurde die Relation $\equiv_A$ für einen deterministischen endlichen Automaten $A = (\Sigma, Q, \rightarrow, q_0, F)$ definiert durch

$$u \equiv_A v \quad \text{gdw.} \quad \text{es ein } q \in Q \text{ gibt, mit } q_0 \xrightarrow{u} q \text{ und } q_0 \xrightarrow{v} q.$$

Diese Relation kann auch für nichtdeterministische Automaten betrachtet werden. Untersuchen Sie jeweils, ob die Relation $\equiv_A$ für einen NEA A im Allgemeinen…

(a) …reflexiv ist.

(b) …symmetrisch ist.

(c) …transitiv ist.

Aufgabe 3: Minimalautomat 3 P

Diese Aufgabe zeigt einen Algorithmus, mit dem Minimalautomaten berechnet werden können.

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus.

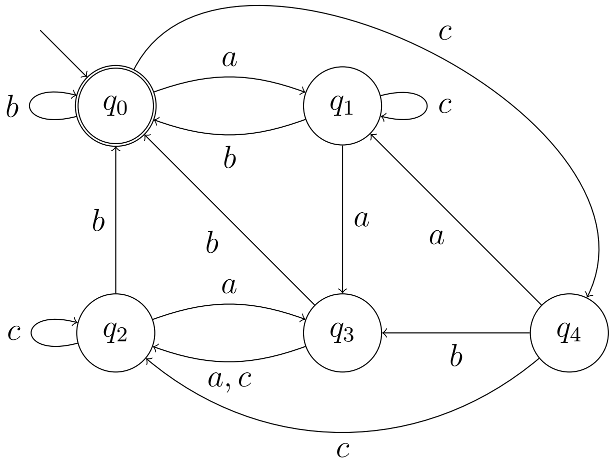
MARKIERUNGSALGORITHMUS

Eingabe: Deterministischer endlicher Automat $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimalautomat für die Sprache $L(A)$.

1. Eliminiere in A alle nicht erreichbaren Zustände.
2. Zeichne eine Tabelle, in der es für jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ mit $q \neq q'$ ein Feld gibt.
3. Markiere jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ für das $q \in F$ und $q' \notin F$ gilt.
4. Betrachte für jedes unmarkierte Zustandspaar $\{q, q'\}$ und jedes Symbol des Alphabets a das Zustandspaar $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$. Ist $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$ markiert, so markiere auch $\{q, q'\}$.
   (Ist $\delta(q, a) = \delta(q', a)$, und damit das Paar nicht in der Tabelle vorhanden, so behandle es als unmarkiert.)
   (Zur Nachvollziehbarkeit hilft es, als Markierung den jeweiligen Buchstaben a – den "Grund" für die Markierung – zu vermerken.)
5. Wiederhole Schritt 4 so lange, bis es in der Tabelle keine Änderungen mehr gibt.
6. Fasse alle Zustände zusammen, deren Zustandspaare nicht markiert sind.
   (Wird der Initialzustand mit anderen Zuständen zusammen gefasst, so ist der zusammengefasste Zustand der neue Initialzustand. Wird ein akzeptierender Zustand mit anderen Zuständen zusammengefasst, so ist der zusammengefasste Zustand wieder akzeptierend.)

Wenden Sie nun den Markierungsalgorithmus an und konstruieren Sie den Minimalautomaten für die Sprache des folgenden DEA.



Geben Sie zusätzlich zum Minimalautomaten auch die verwendete Markierungstabelle an.

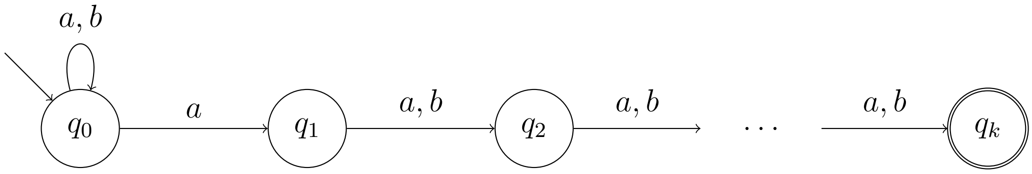
Aufgabe 4*: Satz von Myhill und Nerode 4 Bonuspunkte

In dieser Aufgabe beweisen Sie, dass die exponentielle Explosion der Zustandszahl bei der Determinisierung manchmal unumgänglich ist.

Betrachten Sie die Sprache

$$L_k = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ das } k\text{-letzte Zeichen ist ein } a\}$$

die von dem folgenden NEA erkannt wird:



Zeigen Sie, dass jeder DEA, welcher die Sprache L_k erkennt, mindestens 2^k Zustände hat.