Prof. Dr. Andreas Podelski
Dominik Klumpp

Abgabe bis Montag, 26. Juni 2023
16:00 Uhr via ILIAS
Besprechung: 4./5. Juli 2023

Übungen zu Theoretische Informatik
Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Kontextfreie Grammatik — 1+2+1* P

Diese Aufgabe dient einem besseren Verständnis von kontextfreien Grammatiken.

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$, mit $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{&S \to \varepsilon, \\ &S \to aSbS, \\ &S \to bSaS\} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort *abbbaa* an.

(b) Welche Sprache wird von G erzeugt? Geben Sie eine möglichst einfach zu beschreibende Sprache L an und begründen sie warum $L = L(G)$ gilt.

(c) **Bonus:** Ist die Grammatik G eindeutig? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 2: Reguläre Ausdrücke 2 P

In dieser Aufgabe üben Sie, eine Grammatik für eine gegebene Sprache zu finden.

Geben Sie eine Grammatik an, die die Menge der regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ erzeugt. Benutzen Sie dazu die folgenden Terminalsymbole:

$$T = \Sigma \cup \{ \boxed{\emptyset}, \boxed{\varepsilon}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{{}^*}, \boxed{(}, \boxed{)} \}$$

Aufgabe 3: Dangling Else 2+3* P

Diese Aufgabe verdeutlicht eine praktische Problematik von nicht-eindeutigen Grammatiken.

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$, mit

- dem Alphabet der Nichtterminalsymbole

$$N = \{Prog, Cond, Var\}$$

- dem Alphabet der Terminalsymbole

$$T = \{\boxed{\texttt{if}}, \boxed{\texttt{then}}, \boxed{\texttt{else}}, \boxed{\texttt{:=}}, \boxed{\texttt{+1}}, \boxed{\texttt{-1}}, \boxed{\texttt{x}}, \boxed{\texttt{y}}, \boxed{\texttt{=0}}\}$$

- dem Startsymbol

$$S = Prog$$

- und den folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
Prog &\rightarrow \boxed{\texttt{if}}\ Cond\ \boxed{\texttt{then}}\ Prog \\
Prog &\rightarrow \boxed{\texttt{if}}\ Cond\ \boxed{\texttt{then}}\ Prog\ \boxed{\texttt{else}}\ Prog \\
Prog &\rightarrow Var\ \boxed{\texttt{:=}}\ Var\ \boxed{\texttt{+1}} \\
Prog &\rightarrow Var\ \boxed{\texttt{:=}}\ Var\ \boxed{\texttt{-1}} \\
Cond &\rightarrow Var\ \boxed{\texttt{=0}} \\
Var &\rightarrow \boxed{\texttt{x}} \\
Var &\rightarrow \boxed{\texttt{y}}
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass G nicht eindeutig ist.

(b) **Bonus:** Geben Sei eine eindeutige kontextfreie Grammatik G' an, sodass $L(G') = L(G)$ gilt.

Aufgabe 4: Palindrome 1+4 P

In dieser Aufgabe führen Sie einen formalen Beweis über die Sprache einer Grammatik.

Vom letzten Übungsblatt kennen Sie bereits die Sprache der *Palindrome* über dem zweibuchstabigen Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_{Pal} = \{w_0 w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid \text{für alle } i = 0, \dots, n \text{ gilt } w_i \in \Sigma \text{ und } w_i = w_{n-i}\}$$

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die L_{Pal} erzeugt.

(b) Beweisen Sie durch Induktion, dass $L(G) = L_{Pal}$ gilt.

Hinweis: Versuchen Sie in Teilaufgabe (a) mit einem Nichtterminalsymbol auszukommen. In Teilaufgabe (b) kann an einer Stelle im Beweis eine Fallunterscheidung zwischen Wörtern gerader und ungerader Länge hilfreich sein.

Aufgabe 5*: Nicht-reguläre Sprachen 3+3 Bonuspunkte

Diese Aufgabe dient zur Übung von Nichtregularitätsbeweisverfahren.

Zeigen Sie für die folgenden Sprachen jeweils, dass sie nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{\, a^{(n^2)} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$

(b) $L_2 = \{\, a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl} \,\}$

Aufgabe 6*: **Nerode-Rechtskongruenz mit ε** 3 Bonuspunkte

In dieser Variation einer Quizaufgabe geht es noch einmal um die Nerode-Rechtskongruenz.

Sei L eine nichtleere Sprache über dem Alphabet Σ, und sei $w \in \Sigma^*$ ein nichtleeres Wort. Zeigen Sie: Falls $w \equiv_L \varepsilon$, so folgt, dass L unendlich viele Wörter enthält.