Prof. Dr. Andreas Podelski
Dominik Klumpp

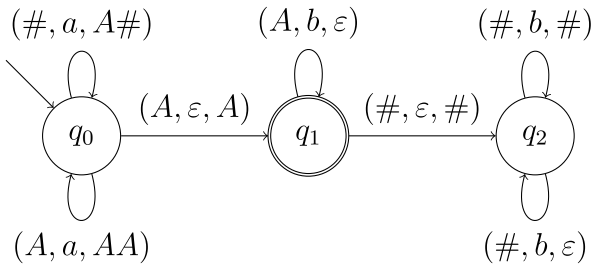
Abgabe bis Montag, 3. Juli 2023
16:00 Uhr via ILIAS
Besprechung: 11./12. Juli 2023

Übungen zu Theoretische Informatik
Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Kellerautomaten — 1+1+1 P

Diese Aufgabe macht Sie mit den Akzeptanzbedingungen für Kellerautomaten vertraut.

Betrachten Sie folgenden Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$, mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, der Menge von Zuständen $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, A\}$, dem Startsymbol des Kellers $Z_0 = \#$ und der Menge von Endzuständen $F = \{q_1\}$.



In der Vorlesung haben Sie zwei Varianten der Sprach-Akzeptanz für Kellerautomaten kennengelernt: Akzeptanz (mit Endzustand) und Akzeptanz mit dem leeren Keller.

(a) Akzeptiert $\mathcal{K}$ das Wort $aabbb$? Akzeptiert $\mathcal{K}$ das Wort $aabbb$ mit dem leeren Keller?

(b) Was ist die von $\mathcal{K}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{K})$?

(c) Was ist die von $\mathcal{K}$ mit dem leeren Keller erkannte Sprache $L_\varepsilon(\mathcal{K})$?

Aufgabe 2*: Kellerautomaten II 3 Bonuspunkte

In dieser Aufgabe üben Sie, eine Sprache durch Kellerautomaten zu beschreiben.

Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$ an, so dass gilt:

$$L(\mathcal{K}) = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau so viele Vorkommen von } a \text{ wie von } b \,\}$$

Aufgabe 3: Top des Kellers 4 P

In dieser Aufgabe beweisen Sie eine wichtige Hilfsaussage für die Korrespondenz von kontextfreien Grammatiken und Kellerautomaten.

Lemma 3.4 aus dem Skript besagt:

> *Sei* $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ *ein Kellerautomat. Dann gilt für alle* $w \in \Sigma^*$, $q, q' \in Q$,$Z \in \Gamma$ *und* $\gamma \in \Gamma^*$*: Wenn*
>
> $$(q, Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon),$$
>
> *so auch*
>
> $$(q, Z\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma).$$

Beweisen Sie dieses Lemma.

Hinweis: Es ist leichter, die folgende allgemeinere Behauptung zeigen.

Für alle $w \in \Sigma^*, q, q' \in Q, Z \in \Gamma$ und $\gamma, \hat{\gamma} \in \Gamma^*$ gilt:
Wenn $(q, Z\hat{\gamma}) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon)$, so auch $(q, Z\hat{\gamma}\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma)$.

Aufgabe 4: Akzeptanz mit dem leeren Keller 2 + 3 P

In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass die verschiedenen Akzeptanzbedingungen für Kellerautomaten ineinander übersetzt werden können.

Satz 3.5(2) aus dem Skript besagt:

> *Zu jedem Kellerautomat $\mathcal{A}$ kann ein Kellerautomat $\mathcal{B}$ mit $L_\varepsilon(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ konstruiert werden.*

(a) Gegeben $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$. Geben Sie eine Definiton des entsprechenden Kellerautomaten $\mathcal{B}$ an.

(b) Beweisen Sie, dass $L_\varepsilon(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ gilt.