Prof. Dr. Andreas Podelski
Dominik Klumpp Besprechung: 18./19. & 25./26. April 2023

Übungen zu Theoretische Informatik
Präsenzübung

Diese Präsenzübung soll dazu dienen, ein paar Grundlagen für die Vorlesung zu wiederholen, und Sie auf die Vorlesung und den Übungsbetrieb dieses Semester vorzubereiten.

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sollen in den Tutoraten der ersten und zweiten Vorlesungswoche, d.h. am 18./19. und 25./26. April 2023, bearbeitet und besprochen werden.

Beginnend in der ersten Vorlesungswoche werden wir zudem wöchentliche Übungsblätter veröffentlichen, die Sie zu Hause bearbeiten und über ILIAS abgeben sollen. Beachten Sie, dass die Bearbeitung der Übungsblätter verpflichtend für das Bestehen der Studienleistung ist.

Weitere Informationen zum Übungsbetrieb finden Sie auf der Website der Vorlesung unter `https://swt.informatik.uni-freiburg.de/teaching/SS2023/info3`.

Aufgabe 1: Induktionsbeweise

Induktionsbeweise sind eine zentrale Beweistechnik im Rahmen unserer Vorlesung sowie darüber hinaus. Ein Grundverständnis dieser Beweistechnik ist daher besonders wichtig.
Beweisen Sie durch Induktion die folgenden Aussagen.

(a) $\forall n, m \in \mathbb{N} \,.\, \sum_{i=0}^{n} m = m(n+1)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, n^2 \geq n$

(c) *Für jede endliche Menge M gilt, dass* $|\mathbb{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Wenden Sie hier eine Induktion über die Kardinalität $|M|$ der Menge M an.

Hinweis: Im Rahmen unserer Vorlesung zählen wir 0 zu den natürliche Zahlen ($0 \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 2: Induktionsbeweise II

Diese Aufgabe soll mögliche Fehlerquellen bei unsauberen Induktionsbeweisen veranschaulichen.
Im Folgenden geben wir einen Induktionsbeweis, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben. Wo liegt der Fehler in diesem Beweis?

Beweis. *Wir beweisen zuerst eine stärkere Aussage:*

($\star$) Für jede Zahl $n \geq 1$, und für jede Gruppe G von n Pferden gilt, dass alle Pferde in der Gruppe G dieselbe Farbe haben.

Dies ist in der Tat eine stärkere Aussage: Da für jede beliebig große Gruppe von Pferden gilt, dass alle Pferde in der Gruppe dieselbe Farbe haben, gilt dies insbesondere auch für die Gruppe aller Pferde.

Wir beweisen die Aussage ($\star$) durch Induktion über n:

Induktionsanfang $n = 1$: *Offensichtlich gilt die Aussage für jede Gruppe G von Größe 1.*

Induktionshypothese: *Wir nehmen an, dass für jede Gruppe G von n Pferden gilt, dass alle Pferde in G dieselbe Farbe haben.*

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n + 1$: *Sei G eine Gruppe von $n + 1$ Pferden, und seien p_1, p_2 zwei (verschiedene) Pferde in G. Nehmen wir p_1 aus der Gruppe G heraus, haben wir eine Gruppe von n Pferden, welche nach Induktionshypothese alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir p_1 der Gruppe wieder hinzu und nehmen dafür p_2 aus der Gruppe, können wir erneut die Induktionshypothese anwenden. Damit folgt, dass p_1 und p_2 dieselbe Farbe haben wie alle anderen Pferde in G.* ■

Aufgabe 3: Induktionsbeweise III

Diese Aufgabe soll mögliche Fehlerquellen bei unsauberen Induktionsbeweisen veranschaulichen.
Im Folgenden beweisen wir, dass es eine natürliche Zahl gibt, die größer als alle anderen natürlichen Zahlen ist. Wo liegt der Fehler in diesem Beweis?

Beweis. *Ähnlich zur vorigen Aufgabe beweisen wir zuerst eine stärkere Aussage:*

($\star$) Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, und jede Menge M von n natürlichen Zahlen, gibt es eine Zahl $x \in \mathbb{N}$, so dass $x > m$ für alle $m \in M$.

Wir beweisen ($\star$) durch Induktion:

Induktionsanfang $n = 0$: *Sei M eine beliebige Menge mit $|M| = 0$. Dann muss M die leere Menge sein. Wir wählen ein beliebiges $x \in \mathbb{N}$, z.B. $x = 17$, und die zu zeigende Aussage gilt.*

Induktionshypothese: *Wir nehmen an, dass für jede Menge M von n natürlichen Zahlen eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x > m$ für alle $m \in M$.*

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n + 1$: *Sei M eine beliebige Menge von $n+1$ natürlichen Zahlen, und sei m_0 eine der Zahlen in M. Dann enthält die Mengendifferenz $M \setminus \{m_0\}$ gerade n natürliche Zahlen. Also existiert nach Induktionshypothese eine natürliche Zahl x, so dass $x > m$ für alle $m \in M \setminus \{m_0\}$. Wir wählen nun die Zahl $x' := \max(x, m_0)+1$. Dann gilt, dass $x' > m_0$, und für alle $m \in M \setminus \{m_0\}$ gilt $x' > x > m$. Also haben wir insgesamt, dass $x' > m$ für alle $m \in M$.* ■

Definition: *Eine* Relation R *über einer Menge* M *ist eine Menge von Paaren von Elementen aus* M*, d.h.* $R \subseteq M \times M$*.* R *ist eine* Äquivalenzrelation*, falls die folgenden 3 Eigenschaften erfüllt sind:*

Reflexivität: *Für alle* $x \in M$ *gilt, dass* $(x, x) \in R$.

Symmetrie: *Für alle Paare* $(x, y) \in R$ *gilt, dass auch* $(y, x) \in R$.

Transitivität: *Für alle Paare* $(x, y) \in R$ *und* $(y, z) \in R$ *gilt, dass auch* $(x, z) \in R$.

Definition: *Für eine Äquivalenzrelation* R *und ein Element* $x \in M$ *bezeichnet* $[x]_R$ *die* Äquivalenzklasse *von* x*:*

$$[x]_R = \{\, y \in M \mid (x, y) \in R \,\}$$

Aufgabe 4: Beispiele für Äquivalenzrelationen

In dieser Aufgabe sollen Sie eine Intuition für Äquivalenzrelationen entwickeln.

(a) Definieren Sie drei verschiedene Äquivalenzrelationen über den natürlichen Zahlen. Geben Sie für jede Relation an, wie viele Äquivalenzklassen es gibt.

(b) Sei R_Q die folgende Relation über Paare natürlicher Zahlen $\langle n, m \rangle$, wo $m \neq 0$:

$$R_Q = \{\, (\langle n_1, m_1 \rangle, \langle n_2, m_2 \rangle) \in (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))^2 \mid n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1 \,\}$$

Beweisen Sie, dass R_Q eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Was sind die Äquivalenzklassen von R_Q? Finden Sie einen Zusammenhang zu einem Ihnen bereits bekannten mathematischen Konzept.

Aufgabe 5: Abschlusseigenschaften von Äquivalenzrelationen

Diese Aufgabe dient dazu, Beweise über ein paar einfache gegebene Definitionen zu üben.

Gegeben sei eine Menge M und zwei Relationen R_1, R_2 über M. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Falls R_1 eine Äquivalenzrelation ist, und $R_2 \subseteq R_1$, dann ist auch R_2 eine Äquivalenzrelation.

(b) Falls R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen sind, dann ist auch der Schnitt $R_1 \cap R_2$ eine Äquivalenzrelation.

(c) Falls R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen sind, dann ist auch die Vereinigung $R_1 \cup R_2$ eine Äquivalenzrelation.

(d) Falls R_1 eine Äquivalenzrelation ist, und $N \subseteq M$, dann ist auch die Restriktion $R_1|_N := R_1 \cap (N \times N)$ eine Äquivalenzrelation.

(e) Falls R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen sind, dann ist auch die Komposition $R_1 \circ R_2$ eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6: Äquivalenzrelationen und Funktionen

Diese Aufgabe soll einen wichtigen Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Funktionen aufzeigen.

(a) Gegeben seien zwei Mengen M und N, und eine Funktion $f : M \to N$. Die Relation $R_f \subseteq M \times M$ sei folgendermaßen definiert:

$$\forall x, y \in M\,.\,(x, y) \in R_f \iff f(x) = f(y)$$

Beweisen Sie, dass R_f eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Gegeben sei eine Menge M, und eine Äquivalenzrelation R auf M. Geben Sie eine Menge N und eine Funktion $f_R : M \to N$, so dass gilt:

$$\forall x, y \in M\,.\,(x, y) \in R \iff f_R(x) = f_R(y)$$

Beweisen Sie, dass ihre Funktion diesen Zusammenhang erfüllt.

(c) Geben Sie für jede der Äquivalenzrelationen R aus Aufgabe 4 eine Funktion f an, so dass R genau gleich der durch f induzierten Relation R_f ist.

Nutzen Sie hier nicht die allgemeine Lösung aus der Teilaufgabe (b), sondern speziell auf die Relationen zugeschnittene Funktionen.

Definition: *Eine* Partition P *einer Menge* M *ist eine Menge von Teilmengen von* M, *d.h.* $P \subseteq \mathbb{P}(M)$, *so dass gilt:*

- *Die Mengen in* P *sind paarweise disjunkt, d.h. für alle Mengen* $X_1, X_2 \in P$ *(wobei* $X_1 \neq X_2$*) gilt* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.
- *Die Vereinigung aller Mengen in* P *ergibt wieder* M: $\bigcup_{X \in P} X = M$.

Aufgabe 7: Äquivalenzrelationen und Partitionen

Diese Aufgabe soll einen wichtigen Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen aufzeigen.

(a) Gegeben sei eine Menge M und eine Äquivalenzrelation R über M. Zeigen Sie, dass $P_R = \{\, [x]_R \mid x \in M \,\}$ eine Partition von M ist.

(b) Gegeben sei eine Menge M und eine Partition P der Menge M. Definieren Sie eine Äquivalenzrelation R_P basierend auf der Partition P, und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.