Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

Probeklausur zur Vorlesung
Theoretische Informatik
WS 2013/2014

Die Klausur besteht aus diesem Deckblatt und sieben Blättern mit je einer Aufgabe. Falls Sie eine Aufgabe nicht auf dem entsprechenden Blatt bearbeiten, machen Sie das bitte deutlich kenntlich. Auf Anfrage erhalten Sie zusätzliches Papier. Tragen Sie auf jedem Blatt bitte Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Zur Bearbeitung haben Sie 90 Minuten Zeit. Insgesamt können 105 Punkte erzielt werden. 15 davon sind als Bonuspunkte gedacht. Zum Bestehen der Klausur wären 45 Punkte hinreichend. (Die echte Klausur wird 120 Minuten dauern und 120 erreichbare Punkte haben, Bonuspunkte sind dort nicht vorgesehen.)

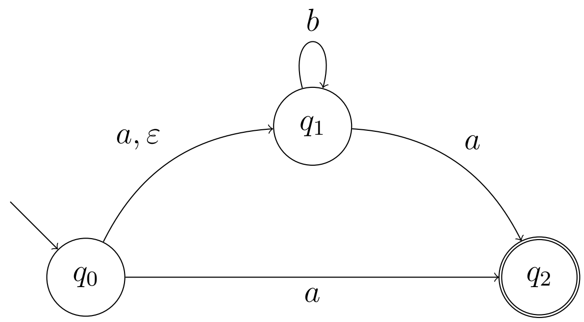
Nicht lesbare Lösungen/Lösungsversuche werden nicht gewertet. Falls Sie eine Aufgabe mehrmals bearbeiten, machen Sie bitte kenntlich, welche Lösung bewertet werden soll.

Aufgabe	Erreichte Punkte
1. Endliche Automaten	von 14
2. Kontextfreie Sprachen	von 16
3. Kontextfreie Grammatiken	von 13
4. Entscheidbarkeit	von 18
5. Polynomielle Reduktion	von 18
6. Verschiedene Themengebiete	von 16
7. Postsches Korrespondenzproblem	von 10
Summe	von 105

Name: ________________________________ Matrikel-Nr.: ____________________

1. Aufgabe (Endliche Automaten) $\boxed{14}$

Gegeben sei der folgende ε-NEA $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache von $\mathcal{A}$ beschreibt. $\boxed{3}$

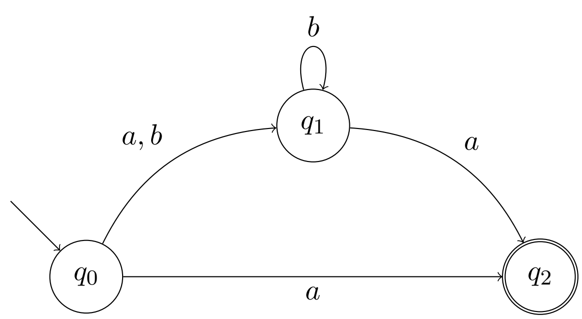
(b) Geben Sie zu $\mathcal{A}$ einen äquivalenten NEA $\mathcal{B}$ an. $\boxed{3}$

(c) Geben Sie zu $\mathcal{B}$ einen äquivalenten DEA an. $\boxed{8}$

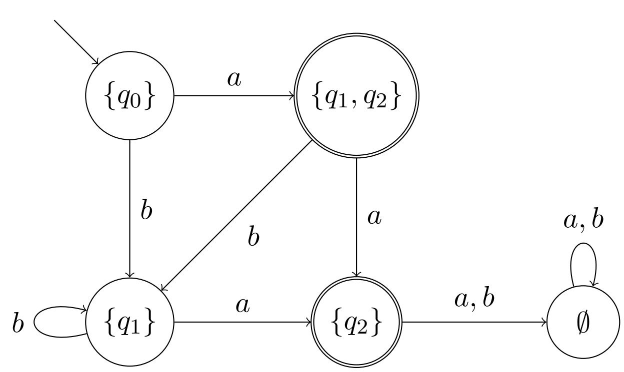
.... Lösungsskizze ....

(a) $\alpha = a + ((a + \varepsilon)b^*a) = a + ab^*a + b^*a$

(b)



(c)



Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: __________________

2. Aufgabe (Kontextfreie Sprachen) **16**

Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^j b^k c^m \in \{a,b,c\}^* \mid j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N},\ j < k < m\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht kontextfrei ist.

.... Lösungsskizze ....

Annahme: L ist kontextfrei. Dann gibt es nach dem Pumping Lemma ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter z länger als n gilt: Es gibt eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| > 0$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $z' = uv^iwx^iy \in L$.
Sei n die Länge aus dem Pumping Lemma. Wähle $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ und sei $k := |uvw| \leq n$. Wir betrachten zwei Fälle.

(a) vwx enthält kein c. Es gibt zwei (fast symmetrische) Unterfälle.

   (i) vwx enthält kein a. Dann enthält es mindestens ein b. Wähle $i = 2$. Dann steigt die Anzahl der b um mindestens eins und wir haben mindestens so viele b wie c.

   (ii) vwx enthält ein a. Wähle $i = 3$. Dann steigt die Anzahl der a um mindestens zwei und wir haben mindestens so viele a wie c.

(b) vwx enthält ein c. Dann enthält es aber kein a, da $|vwx| \leq n < n + 1 = |b^{n+1}|$. Der Fall geht fast analog zu oben. Wähle jeweils $i = 0$.

   (i) vwx enthält kein b. Dann sinkt die Anzahl der c um mindestens eins und wir haben mindestens so viele b wie c.

   (ii) vwx enthält ein b. Dann sinkt die Anzahl der b um mindestens eins und wir haben mindestens so viele a wie b.

Somit gibt es also keine Zerlegung. Widerspruch zur Annahme.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: __________________

3. Aufgabe (Kontextfreie Grammatiken) **13**

Gegeben sei die kontextfreie Sprache

$$L = \{a^n b^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}.$$

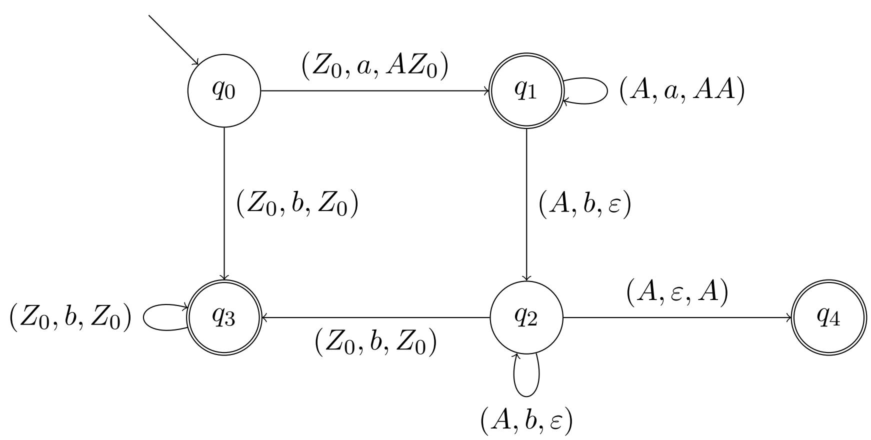
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt **oder** konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, der L mit Endzustand akzeptiert. Geben Sie jede Komponente des Tupels $G = (N, T, P, S)$ bzw. $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ explizit an. Einzige Ausnahme ist die Transitionsrelation des Kellerautomaten, diese dürfen Sie auch durch ein Zustandsübergangsdiagramm beschreiben.

.... Lösungsskizze ....

kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \rightarrow aA \mid Bb \\ & A \rightarrow aA \mid aAb \mid \varepsilon \\ & B \rightarrow Bb \mid aBb \mid \varepsilon\ \} \end{aligned}$$

Kellerautomat $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Gamma = \{Z_0, A\}$, $F = \{q_1, q_3, q_4\}$ und δ:



Invarianten zum besseren Verständnis:

- q_0: ε gelesen
- q_1: $\#_a > \#_b$
- q_2: $\#_a \geq \#_b$
- q_3: $\#_a < \#_b$
- q_4: $\#_a > \#_b$

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: __________________

4. Aufgabe (Entscheidbarkeit) **18**

Gegeben sei die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{1, 0\}$.

$$L = \{bw_\tau 00u \in \Sigma^* \mid u \text{ beginnt mit dem Zeichen } 1 \\ \text{und } \tau \text{ ist eine Turingmaschine, die auf } u \text{ hält.}\}$$

(a) Ist L entscheidbar? 9

(b) Ist L rekursiv aufzählbar? 9

Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

. . . . Lösungsskizze . . . .

(a) Nein. Wir reduzieren das unentscheidbare Problem H_0 auf L, $H_0 \leq L$ mittels $f : \Sigma \to \Sigma$. Idee: Zu gegebener Turingmaschine τ konstruieren wir $\tau' = \tau_{\text{del}}\tau$, also die Turingmaschine, die zunächst die Eingabe löscht und danach so arbeitet wie τ.

$$f(w) = \begin{cases} bw_{\tau'}001 & w \text{ ist von der Form } bw_\tau \text{ für ein } \tau \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist total und berechenbar. Offensichtlich ist „1“ ein Wort, das mit 1 beginnt. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Leftrightarrow w = bw_\tau \text{ und } \tau \text{ hält auf dem leeren Band} \\ &\Leftrightarrow f(w) = bw_{\tau'}001 \text{ und } \tau' \text{ hält angesetzt auf } 1 \\ &\Leftrightarrow f(w) \in L \end{aligned}$$

(b) Ja. Wir reduzieren L auf das rekursiv aufzählbare Problem H, $L \leq H$ mittels $f : \Sigma \to \Sigma$. Idee: Wenn das Wort u mit 1 beginnt, führen wir ganz normal τ aus. Anderenfalls übersetzt f in eine Zeichenkette, die keine potentielle Eingabe für H ist, z.B. ε.

$$f(w) = \begin{cases} w & w \text{ ist von der Form } bw_\tau 00u \text{ für ein } \tau \text{ und } u \text{ beginnt mit } 1 \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist total und berechenbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in L &\Leftrightarrow w = bw_\tau 00\overbrace{1v}^{u} \text{ und } \tau \text{ hält angesetzt auf } u = 1v \\ &\Leftrightarrow f(w) = w = bw_\tau 00\overbrace{1v}^{u} \text{ und } \tau \text{ hält angesetzt auf } u = 1v \\ &\Leftrightarrow f(w) \in H \end{aligned}$$

Name: ________________________________ Matrikel-Nr.: ___________________

5. Aufgabe (Polynomielle Reduktion) **18**

Das Problem HSet (Hitting-Set) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* Eine Menge M und eine Menge von Teilmengen $\mathcal{S}$ (d.h. $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq M$ für $i = 1, \ldots, n$) sowie eine natürliche Zahl $k \leq n$.
>
> *Frage:* Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq M$, sodass $|T| \leq k$ und $T \cap S_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots n$? (Mit anderen Worten: Gibt es eine höchstens k-elementige Teilmenge T, die mit jedem S_i mindestens ein gemeinsames Element hat?)

Das NP-vollständige Problem KnÜb (Knotenüberdeckung, bzw. VertexCover) ist wie folgt definiert.

> *Gegeben:* Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
>
> *Frage:* Besitzt G eine „überdeckende Knotenmenge“ der Größe höchstens k? (Eine überdeckende Knotenmenge ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$.)

(a) Begründen Sie, warum HSet in NP liegt. 4

(b) Beweisen Sie, dass HSet NP-vollständig ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass KnÜb NP-vollständig ist. 14

Es genügt, wenn Sie Ihre Laufzeitabschätzung grob begründen. Sie müssen weder Pseudocode noch Turingmaschinen explizit angeben.

.... Lösungsskizze ....

Siehe Übungsblatt 14.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ________________

6. Aufgabe (Verschiedene Themengebiete) **16**

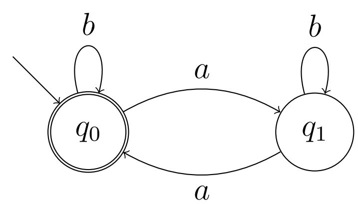
Einige der folgenden Behauptungen sind falsch. Geben Sie für jede falsche Behauptung ein Gegenbeispiel an. Richtige Behauptungen und die Gegenbeispiele müssen nicht weiter kommentiert werden.

(a) Gilt für eine Sprache L die „rechte Seite“ des Pumping Lemma (für reguläre Sprachen),

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in L \text{ mit } |z| \geq n \quad \exists u, v, w \in \Sigma^*, \text{ sodass}$$
$$z = uvw \text{ und } v \neq \varepsilon \text{ und } |uv| \leq n \text{ und } \forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$$

so ist L regulär.

(b) Es gibt keine reguläre (bzw. rechtslineare) Grammatik, welche die Sprache des folgenden DEA über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt.



(c) Zu jeder kontextfreien Grammatik gibt es eine kontextsensitive Grammatik, die die gleiche Sprache erzeugt.

(d) Der Schnitt zweier unentscheidbarer Sprachen ist *immer* unentscheidbar.

(e) Jede reguläre Sprache ist in der Komplexitätsklasse P.

(f) Es gibt eine Bijektion zwischen P und NP.

.... Lösungsskizze ....

(a) nein: Bsp.: Übungsblatt 6 Aufgabe 3: $L = \{a^ib^jc^k \mid i = 0 \text{ oder } k < j, \text{ für } i, j, k \in \mathbb{N}\}$

(b) nein: Bsp.: $G = (N, T, P, S), N = \{S, A\}, T = \{a, b\}$,
$P = \{S \to bS \mid aA \mid \varepsilon, A \to bA \mid aS\}$

(c) ja: Jede kontextfreie Grammatik ist per Definition auch kontextsensitiv.

(d) nein: Bsp.: $L_1 = H, L_2 = \overline{H}$. H ist unentscheidbar, also auch das Komplement.
$L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Die leere Menge ist entscheidbar.

(e) ja: Das Wortproblem für reguläre Sprachen ist linear durch einen DEA lösbar.

(f) ja: P und NP sind Teilmengen aller Turing-berechenbaren Funktionen $\mathcal{T}$. Diese Menge wiederum ist abzählbar. P und NP sind offensichtlich unendlich. Damit sind sie beide abzählbar unendlich und somit existiert nach Definition eine Bijektion.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ____________________

7. Aufgabe (Postsches Korrespondenzproblem (Bonusaufgabe)) **10**

Geben Sie für jedes der folgenden Postschen Korrespondezprobleme entweder eine Lösung an oder zeigen Sie, dass keine Lösung existiert:

(a) ((ba,bba),(ab,aba),(aab,a)) 5

(b) ((aaba,aa), (abba,baab), (abab,baaa)) 5

.... Lösungsskizze ....

(a) eine mögliche Lösung: (3, 2, 1):

a	a	b	a	b	b	a
a	a	b	a	b	b	a

(b) keine Lösung: Mit Index 2 und 3 kann nicht gestartet werden, daher müsste mit 1 gestartet werden. Dann ist aber das zweite Wort kürzer als das erste und kann nie mehr länger werden, da es keine Regeln dafür gibt.