ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

14.11.2013
Abgabe: Dienstag 19.11.2013, 16 Uhr
zu Beginn der Vorlesung

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Gleichungen 2 Punkte

In der Vorlesung haben Sie ein auf der Lösung eines Gleichungssystems basierendes Verfahren kennengelernt, um aus einem DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, q_0, F)$ einen regulären Ausdruck zu gewinnen.

Zur Wiederholung: Dazu wird für jeden Zustand q_i des Automaten eine Variable x_i vorgesehen. Die Variable x_i steht für einen regulären Ausdruck, der die vom Zustand q_i ausgehend akzeptierte Sprache beschreibt. Formal:

$$L(x_i) := \{w \in \Sigma^* \mid q_i \xrightarrow{w} q_F \text{ und } q_F \in F\}$$

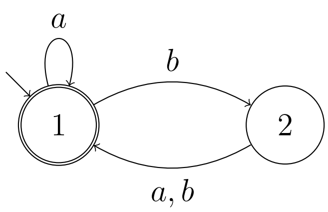
Die vom Automaten akzeptierte Sprache wird dann durch den regulären Ausdruck x_1 (die zum Startzustand gehörende Variable) beschrieben. Der Ausdruck x_i zu der von einem Zustand q_i aus akzeptierten Sprache kann über die Ausdrücke seiner Nachfolge-Zustände definiert werden.

Für jeden Zustand wird dazu eine Gleichung aufgestellt. Wenn z.B. von Zustand q_1 genau die Zustände q_2 durch a und q_3 durch b erreichbar sind, erhält man die Gleichung

$$x_1 = a \cdot x_2 + b \cdot x_3.$$

Für einen Endzustand wird außerdem ε hinzugefügt (in diesem Fall $x_1 = a \cdot x_2 + b \cdot x_3 + \varepsilon$).

Betrachten Sie nun folgenden Automaten:



Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf und geben Sie eine Lösung durch Einsetzen an. In diesem Fall ist nach x_1 aufzulösen, da diese Variable dem Startzustand zugeordnet ist. Sie dürfen die regulären Ausdrücke mit Hilfe der folgenden Regeln vereinfachen.

Für reguläre Ausdrücke α, β, γ gelten für die Operationen "Konkatenation" und "Oder":

$$\begin{aligned}
\text{Assoziativität:}\quad & \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \;\; \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \\
\text{Kommutativität:}\quad & \alpha + \beta = \beta + \alpha \\
\text{Neutrale Elemente:}\quad & \emptyset + \alpha = \alpha, \;\; \varepsilon\alpha = \alpha, \;\; \alpha\varepsilon = \alpha \\
\text{Distributivität:}\quad & \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \;\; (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \\
\text{Absorption:}\quad & \emptyset\alpha = \emptyset, \;\; \alpha\emptyset = \emptyset
\end{aligned}$$

Weiterhin gelten für den Sternoperator:

$$\varepsilon^* = \varepsilon, \;\; (\varepsilon + \alpha)^* = \alpha^*, \;\; (\varepsilon + \alpha)\alpha^* = \alpha^*, \;\; \alpha^*(\varepsilon + \alpha) = \alpha^*$$

Außerdem gilt die *Regel von Arden*: Die Gleichung $x = (\alpha \cdot x) + \beta$ hat $x = \alpha^* \cdot \beta$ als Lösung und diese Lösung ist eindeutig, wenn ε nicht in $L(\alpha)$ enthalten ist.

Aufgabe 2: Reguläre Sprachen 1+3+1 Punkte

Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sind regulär? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) Die Sprache der einbuchstabigen Wortpaare gleicher Länge.

$$L_1 = \{a^n a^n \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(b) Die Sprache der einbuchstabigen Wortpaare gleicher Länge, welche durch ein Zeichen getrennt sind.

$$L_2 = \{a^n b a^n \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(c) Die Sprache der *Palindrome* über dem zweibuchstabigen Alphabet.

$$L_3 = \{w_0 w_1 \ldots w_n \in \{a, b\}^* \mid \text{für alle } i = 0, \ldots, n \text{ gilt } w_i = w_{n-i}\}$$

Aufgabe 3: Aussagekraft des Pumping Lemmas 3+3 Punkte

Betrachten Sie die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } k < j, \text{ für } i, j, k \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Myhill und Nerode, dass L nicht regulär ist. Sie dürfen hierfür sowohl die Definition $\equiv_L$ aus dem Skript als auch die Menge $u^{-1}L$ aus der Vorlesung verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass das Pumping Lemma für L erfüllt ist.

Ist die höhere Mathematik damit hinfällig und sollten wir lieber Webseiten programmieren anstatt uns mit Automaten zu beschäftigen?