ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

21.11.2013
Abgabe: Dienstag 26.11.2013, 16 Uhr
zu Beginn der Vorlesung

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Die $\sim_{\mathcal{A}}$-Äquivalenz 2 Punkte

Für einen DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, q_0, F)$ sei die Relation $\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert durch

$$u \sim_{\mathcal{A}} v \quad \text{gdw.} \quad \text{es ein } q \in Q \text{ gibt, mit } q_0 \xrightarrow{u} q \text{ und } q_0 \xrightarrow{v} q.$$

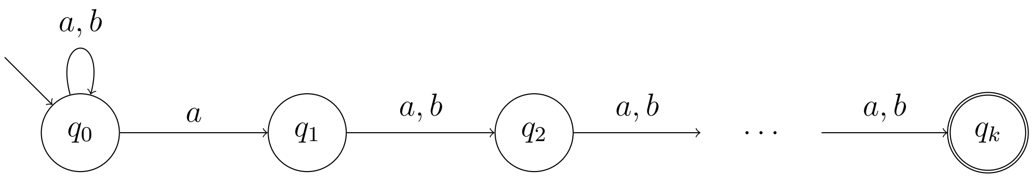
Diese Relation kann auch für NEAs $\mathcal{A}'$ betrachtet werden. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim_{\mathcal{A}'}$ für NEAs im Allgemeinen *keine* Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2: Minimale Anzahl der Zustände 4 Punkte

Aus einer früheren Aufgabe kennen Sie bereits den NEA $\mathcal{B}_k$, der die Sprache

$$L_k = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ das } k\text{-letzte Zeichen ist ein } a\}$$

erkennt und für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wie folgt definiert ist:



In dieser Aufgabe wurde gezeigt, dass der DEA, welcher durch die Potenzmengenkonstruktion aus $\mathcal{B}_k$ entstanden ist, genau 2^k erreichbare Zustände hat.
Zeigen Sie nun, dass jeder DEA, welcher L_k erkennt, mindestens 2^k Zustände hat.

Sie dürfen folgendes Theorem ohne weiteren Beweis verwenden (vgl. Korollar 4.4 im Skript):

Theorem. *Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär und $k = |\{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\}|$. Dann besitzt jeder DEA, der L akzeptiert, mindestens k Zustände.*

Anmerkung: Man nennt k auch den Nerode-Index von L.

Aufgabe 3: Minimalautomat (1) 1 + 4 Punkte

(a) NEAs werden in der Literatur gelegentlich auch folgendermaßen definiert: (Da die Vereinigungsoperation auf NEAs dieser Art leichter durchzuführen ist, nennen wir sie hier V-NEAs.)

Definition. *Ein* V-NEA *ist ein Tupel* $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, Q_0, F)$*, wobei* $\Sigma, Q, \rightarrow$ *und* F *wie bei einem NEA definiert sind und* $Q_0 \subseteq Q$ *eine Menge von Startzuständen ist.*

Die von einem V-NEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, Q_0, F)$ akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_0 \in Q_0, \exists q \in F : q_0 \xrightarrow{w} q\}.$$

Wie muss der Determinisierungsalgorithmus („Potenzmengenkonstruktion“) angepasst werden, damit er für V-NEAs funktioniert?

(b) In der Vorlesung haben Sie die Definition des Minimalautomaten kennengelernt. Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$ kann mit dem folgenden Algorithmus der Minimalautomat für $L(\mathcal{A})$ konstruiert werden.

Minimierungsalgorithmus von Brzozowski

Eingabe: Deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimalautomat $\mathcal{C}$ für die Sprache $L(\mathcal{A})$.

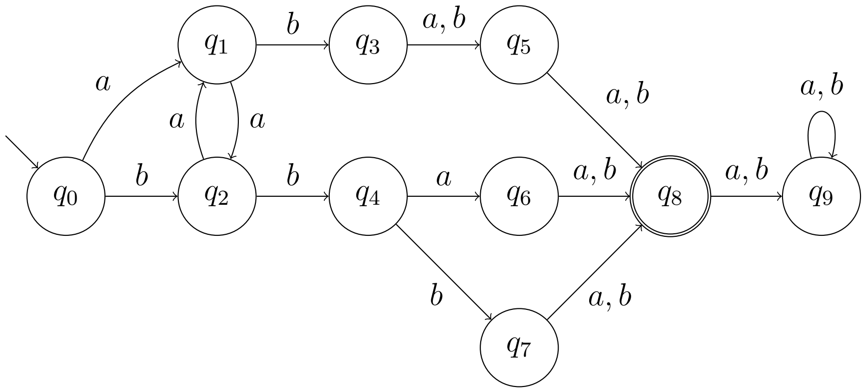
1. konstruiere V-NEA $\mathcal{A}_R$ durch Invertieren von $\mathcal{A}$,
2. konstruiere DEA $\mathcal{B}$ durch Determinisierung von $\mathcal{A}_R$,
3. konstruiere V-NEA $\mathcal{B}_R$ durch Invertieren von $\mathcal{B}$,
4. konstruiere DEA $\mathcal{C}$ durch Determinisierung von $\mathcal{B}_R$.

Gegeben ein DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, q_0, F)$ dann ist der *invertierte Automat* der V-NEA $\mathcal{A}_R = (\Sigma, Q', \rightarrow', Q'_0, F')$, wobei $Q' = Q$, $\rightarrow' = \{(q, s, q') \mid (q', s, q) \in \rightarrow\}$, $Q'_0 = F$ und $F' = \{q_0\}$.

Informell bedeutet *Invertieren*, dass

- alle Kanten umgedreht werden,
- alle alten Endzustände zu neuen Startzuständen werden,
- alle alten Startzustände zu neuen Endzuständen werden.

Wenden Sie den Algorithmus auf folgenden Automaten mit $\Sigma = \{a, b\}$ an. Geben Sie nach jedem Zwischenschritt den entstandenen Automaten an.



Hinweis: Lassen Sie nicht erreichbare Zustände und Zustände, von denen kein Endzustand mehr erreicht werden kann, weg (z.B. q_9). Für den Minimalautomaten können Sie einen Zustand einführen, um die Übergangsfunktion total zu machen.

Aufgabe 4: Minimalautomat (2) 3 Punkte

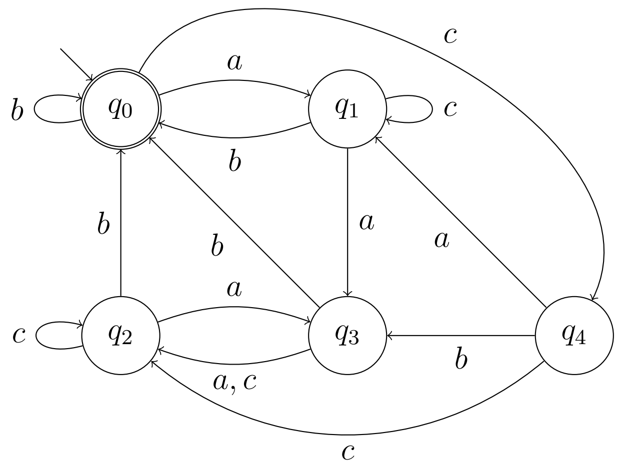
Markierungsalgorithmus

Eingabe: Deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimalautomat für die Sprache $L(\mathcal{A})$.

1. Eliminiere in $\mathcal{A}$ alle nicht erreichbaren Zustände.
2. Zeichne eine Tabelle in der es für jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ mit $q \neq q'$ ein Feld gibt.
3. Markiere jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ für das $q \in F$ und $q' \notin F$ gilt.
4. Betrachte für jedes unmarkierte Zustandspaar $\{q, q'\}$ und jedes Symbol des Alphabets a das Zustandspaar $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$. Ist $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$ markiert, so markiere auch $\{q, q'\}$.
5. Wiederhole Schritt 4 so lange bis es in der Tabelle keine Änderungen mehr gibt.
6. Fasse alle Zustände zusammen, deren Zustandspaare nicht markiert sind.

Wenden Sie den Markierungsalgorithmus an und konstruieren Sie den Minimalautomaten für die Sprache des folgenden DEA. Geben Sie zusätzlich zum Minimalautomaten auch die verwendete Markierungstabelle an.



q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
a
b
c
a, c