ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

25.11.2014
Abgabe bis spätestens Montag 1.12.2014, 16 Uhr
in den Briefkästen in Gebäude 51

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Minimalautomat (1) — 3 Punkte

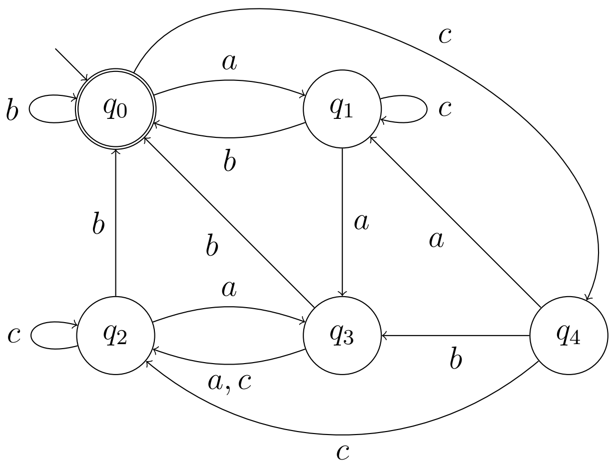
Markierungsalgorithmus

Eingabe: Deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimalautomat für die Sprache $L(\mathcal{A})$.

1. Eliminiere in $\mathcal{A}$ alle nicht-erreichbaren Zustände.
2. Erstelle eine Tabelle, in der es für jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ mit $q \neq q'$ ein Feld gibt.
3. Markiere jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$, für das $q \in F$ und $q' \notin F$ gilt.
4. Betrachte für jedes unmarkierte Zustandspaar $\{q, q'\}$ und jedes Symbol des Alphabets a das Zustandspaar $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$. Ist $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$ markiert, so markiere auch $\{q, q'\}$.
5. Wiederhole Schritt 4 so lange, bis es in der Tabelle keine Änderungen mehr gibt.
6. Fasse alle Zustände zusammen, deren Zustandspaare nicht markiert sind.

Wenden Sie den Markierungsalgorithmus an und konstruieren Sie den Minimalautomaten für die Sprache des folgenden DEA. Geben Sie zusätzlich zum Minimalautomaten auch die verwendete Markierungstabelle an.



Aufgabe 2: Minimalautomat (2) 1 + 4 Punkte

(a) NEAs werden in der Literatur gelegentlich auch folgendermaßen definiert (da die Vereinigungsoperation auf NEAs dieser Art leichter durchzuführen ist, nennen wir sie hier V-NEAs):

Definition. *Ein* V-NEA *ist ein Tupel* $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, Q_0, F)$, *wobei* $\Sigma, Q, \rightarrow$ *und* F *wie bei einem NEA definiert sind und* $\emptyset \subsetneq Q_0 \subseteq Q$ *eine Menge von Startzuständen ist.*

Die von einem V-NEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \rightarrow, Q_0, F)$ akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_0 \in Q_0, \exists q \in F : q_0 \xrightarrow{w} q\}.$$

Wie muss der Determinisierungsalgorithmus („Potenzmengenkonstruktion") angepasst werden, damit er für V-NEAs funktioniert?

(b) In der Vorlesung haben Sie die Definition des Minimalautomaten kennengelernt. Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$, kann mit dem folgenden Algorithmus der Minimalautomat für $L(\mathcal{A})$ konstruiert werden.

Minimierungsalgorithmus von Brzozowski

Eingabe: Deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimalautomat $\mathcal{C}$ für die Sprache $L(\mathcal{A})$.

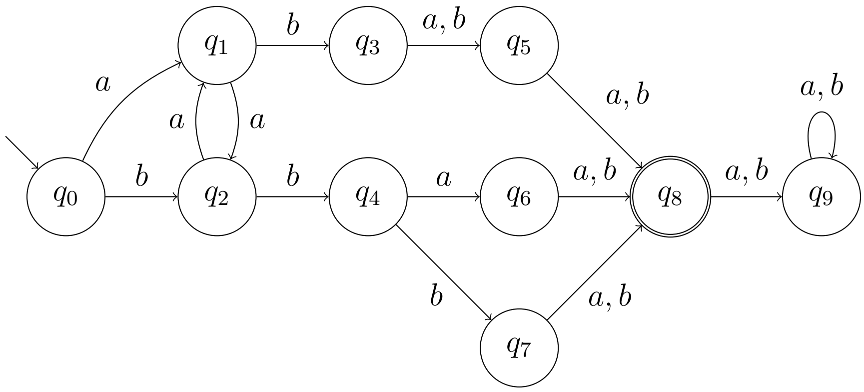
1. Konstruiere V-NEA $\mathcal{A}_R$ durch Invertieren von $\mathcal{A}$.
2. Konstruiere DEA $\mathcal{B}$ durch Determinisierung von $\mathcal{A}_R$.
3. Konstruiere V-NEA $\mathcal{B}_R$ durch Invertieren von $\mathcal{B}$.
4. Konstruiere DEA $\mathcal{C}$ durch Determinisierung von $\mathcal{B}_R$.

Für einen gegebenen DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \to, q_0, F)$ ist der *invertierte Automat* der V-NEA $\mathcal{A}_R = (\Sigma, Q', \to', Q'_0, F')$, wobei $Q' = Q$, $\to' = \{(q, s, q') \mid (q', s, q) \in \to\}$, $Q'_0 = F$ und $F' = \{q_0\}$.

Informell bedeutet *Invertieren*, dass

- alle Kanten umgedreht werden,
- alle alten Endzustände zu neuen Startzuständen werden,
- der alte Startzustand zum neuen (einzigen) Endzustand wird.

Wenden Sie den Algorithmus auf folgenden DEA über $\Sigma = \{a, b\}$ an. Geben Sie nach jedem Zwischenschritt den entstandenen Automaten an.



Hinweis: Lassen Sie nicht-erreichbare Zustände und Zustände, von denen kein Endzustand mehr erreicht werden kann, weg (z.B. q_9). Für den Minimalautomaten können Sie wieder einen Zustand einführen, um die Übergangsfunktion total zu machen.

Aufgabe 3: Kontextfreie Grammatik 1 + 1 + 1 + 1 Punkte

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$, mit $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \varepsilon, \\
& S \to aSbS, \\
& S \to bSaS\}
\end{aligned}
$$

(a) Geben Sie eine Linksableitung für das Wort $abbbaa$ an.

(b) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $abbbaa$ an.

(c) Welche Sprache L wird von G erzeugt? Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung für L an (ein Beweis für $L = L(G)$ ist nicht nötig).

(d) Ist die Grammatik G eindeutig? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4: Reguläre Ausdrücke 2 Punkte

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Geben Sie eine Grammatik an, die die Menge der regulären Ausdrücke über Σ erzeugt. Benutzen Sie dazu die folgenden Terminalsymbole:

$$T = \Sigma \cup \left\{ \boxed{\emptyset}, \boxed{\varepsilon}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{{}^*}, \boxed{(}, \boxed{)} \right\}$$