ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

9.12.2014
Abgabe bis spätestens Montag 15.12.2014, 16 Uhr
in den Briefkästen in Gebäude 51

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Kellerautomaten 2 Punkte

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$, der die folgende kontextfreie Sprache erkennt.

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Geben Sie jede Komponente der Struktur $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ an. Sie dürfen die Transitionsrelation $\rightarrow$ durch ein Zustandsdiagramm wie in Aufgabe 4 darstellen.

Hinweis: Beachten Sie, dass Akzeptanz ohne den Zusatz *"mit leerem Keller"* immer die Akzeptanz mit Endzustand bezeichnet.

Aufgabe 2: Top des Kellers 4 Punkte

Lemma 3.4 aus dem Skript besagt:

> Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$ ein Kellerautomat. Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$, $q, q' \in Q, Z \in \Gamma$ und $\gamma \in \Gamma^*$: Wenn
>
> $$(q, Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon),$$
>
> so auch
>
> $$(q, Z\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma).$$

Beweisen Sie dieses Lemma.

Hinweis: Es ist leichter, die folgende allgemeinere Behauptung zu zeigen.
Für alle $w \in \Sigma^*, q, q' \in Q$ und $\gamma, \hat{\gamma} \in \Gamma^*$ gilt:

$$\text{Wenn } (q, \hat{\gamma}) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon), \text{ so auch } (q, \hat{\gamma}\gamma) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \gamma).$$

Aufgabe 3: Akzeptanz mit leerem Keller 1 Punkt

Satz 3.5(2) aus dem Skript besagt:

> Zu jedem Kellerautomat $\mathcal{A}$ kann ein Kellerautomat $\mathcal{B}$ mit $L_\varepsilon(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ konstruiert werden.

Gegeben $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$. Geben Sie eine Definition des entsprechenden Kellerautomaten $\mathcal{B}$ an.

Aufgabe 4: Kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten 2+3 Punkte

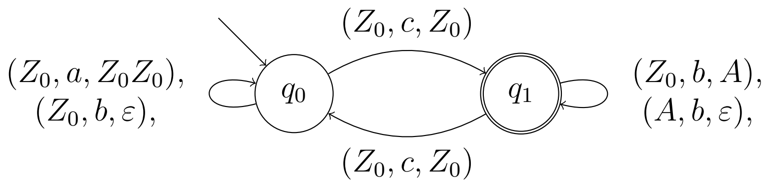
(a) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit der Menge der Nichtterminalsymbole $N = \{S, A, B\}$, der Menge der Terminalsymbole $T = \{a, b, c\}$ und den folgenden Regeln

$$\begin{aligned} P = \{S &\to Aa, \\ S &\to Bc, \\ A &\to aaAb, \\ A &\to a, \\ B &\to aBb, \\ B &\to aA, \\ B &\to \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, sodass $L_\varepsilon(\mathcal{K}) = L(G)$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren.

Geben Sie für Ihren Kellerautomaten eine akzeptierende Abarbeitung (als Folge von Konfigurationen) des Wortes $aaabc$ an.

(b) Gegeben sei der folgende Kellerautomat $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \to, q_0, Z_0, F)$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, der Menge von Zuständen $Q = \{q_0, q_1\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{Z_0, A\}$ und der Menge von Endzuständen $F = \{q_1\}$.



Geben Sie eine Grammatik G an, sodass $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren.

Geben Sie eine Ableitung für das Wort $acbbcb$ in Ihrer Grammatik an.

Aufgabe 5: Kellerautomaten 2 Punkte

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

> Zu jedem Kellerautomaten $\mathcal{K}$ gibt es einen Kellerautomaten $\mathcal{K}'$ mit nur einem Zustand, der die gleiche Sprache mit dem leeren Keller erkennt (d.h. $L_\varepsilon(\mathcal{K}) = L_\varepsilon(\mathcal{K}')$).