ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

23.12.2014
Abgabe bis spätestens Montag 12.1.2015, 16 Uhr
in den Briefkästen in Gebäude 51

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Pumping Lemma I 3 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

$$L = \{a^m b^n c^m d^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, dass L nicht kontextfrei ist. Analoge Fälle müssen Sie nicht mehrfach betrachten; geben Sie die Fälle aber explizit an.

Aufgabe 2: Pumping Lemma II 3 Punkte

Betrachten Sie die Sprache der unären Primzahlen über $\Sigma = \{\mathbf{1}\}$.

$$L = \left\{\mathbf{1}^k \mid k \text{ ist eine Primzahl}\right\}$$

Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3: Pumping Lemma über einelementigem Alphabet 3 Punkte

Sei L eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Angenommen, es gibt einen Beweis mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen (PLR), der beweist, dass L nicht regulär ist. Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen (PLK), dass L auch nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 4: Shuffle-Operator 3 Punkte

Für zwei Wörter $w_1 = a_1 \dots a_m$ und $w_2 = b_1 \dots b_n$ ist der Shuffle-Operator $w_1|||w_2$ (beliebiges Mischen) induktiv definiert durch

- $a_1 \dots a_m|||\varepsilon = \{a_1 \dots a_m\}$
- $\varepsilon|||b_1 \dots b_n = \{b_1 \dots b_n\}$
- $a_1 \dots a_m|||b_1 \dots b_n = \{a_1\}.(a_2 \dots a_m|||b_1 \dots b_n) \cup \{b_1\}.(a_1 \dots a_m|||b_2 \dots b_n)$

Für zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ gilt dann:

$$L_1|||\,L_2 = \bigcup_{\substack{w_1 \in L_1 \\ w_2 \in L_2}} w_1|||w_2$$

Beispiel:

$$ab|||cd = \{ab\}|||\{cd\} = \{abcd, acbd, acdb, cdab, cadb, cabd\}$$

Zeigen Sie, dass die kontextfreien Sprachen nicht unter dem Shuffle-Operator abgeschlossen sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Sprache aus Aufgabe 1 und andere Abschlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen.

Aufgabe 5: (Weihnachts-)Baumautomat 3 Bonuspunkte

Nachdem die Zahl der Wohnungsbrände in den letzten Jahren an Heiligabend drastisch erhöht war, hat die AKfW (Allgemeine Kommission für Weihnachtsfragen) eine neue Norm für Weihnachsbäume mit dem Arbeitstitel: SANTA[1] erlassen.
Zur Kontrolle der Einhaltung dieser Norm nutzt sie Hilfsmittel aus der theoretischen Informatik, nämlich Baumautomaten. Diese Automaten erkennen nicht Mengen von Wörtern (wie die Ihnen bereits bekannten DEAs und NEAs), sondern Mengen von Bäumen.

Dabei verwendet die Kommission die folgenden vier Definitionen:

Definition. *Ein* Rangalphabet *hat die Form* $\Sigma = \bigcup_{0 \le i \le n} \Sigma_i, n \in \mathbb{N}$*, wobei jedem Symbol in* Σ_i *die Stelligkeit* i *zugeordnet ist.*

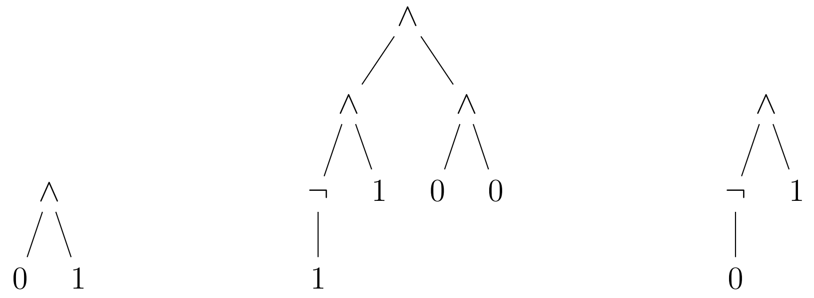
Definition. *Ein* (geordneter gewurzelter) Baum B *über einem Rangalphabet* Σ *ist ein Quadrupel* (V, w, κ, l) *bestehend aus einer Knotenmenge* V*, einem* Wurzelknoten $w \in V$*, einer Kindfunktion* $\kappa : V \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n$*, die jedem Knoten* $v \in V$ *ein Tupel von Kindknoten zuordnet, sowie einer Beschriftungsfunktion für die Knoten* $l : V \to \Sigma$*, so dass Folgendes gilt.*

- *Jeder Knoten außer der Wurzel ist Kind genau eines anderen Knotens, die Wurzel ist Kind von keinem Knoten. D.h. für alle Knoten* v' *außer dem Wurzelknoten gilt* $|\{v \in V \mid v' \in \kappa(v)\}| = 1$*, für den Wurzelknoten* w *gilt* $|\{v \in V \mid w \in \kappa(v)\}| = 0$.
- *Der sich ergebende Graph* $(V, \{(v, v') \mid v' \in \kappa(v)\})$ *ist azyklisch und zusammenhängend.*

[1] Scorching Avoidance and Non-occurrence of Tree Asymmetry

- *Für jeden Knoten $v \in V$ ist die Stelligkeit des Symbols $l(v)$, mit dem er beschriftet ist, gleich der Anzahl seiner ausgehenden Kanten $|\kappa(v)|$.*

Zu Beispiel lassen sich über dem Alphabet $\Sigma_B = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \{0, 1\}$, $\Sigma_1 = \{\neg\}$, $\Sigma_2 = \{\wedge\}$ die folgenden Bäume konstruieren:



Definition. *Ein deterministischer endlicher* Baumautomat $T = (\Sigma, Q, \delta, q_0)$ *besteht aus den folgenden vier Komponenten:*

- *Einem Rangalphabet Σ,*
- *einer endlichen Zustandsmenge Q,*
- *einer Transitionsfunktion $\delta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \delta_i$, wobei $\delta_i : Q \times \Sigma_i \to Q^i$ die i-stellige Transitionsfunktion ist, und*
- *einem Startzustand $q_0 \in Q$.*

Definition. *Sei $B = (V, w, \kappa, l)$ ein Baum über Σ. Ein deterministischer endlicher Baumautomat $T = (\Sigma, Q, \delta, q_0)$* akzeptiert *den Baum B, wenn es eine Annotationsfunktion $\alpha : V \to Q$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:*

- $\alpha(w) = q_0$.
- *Seien $\alpha(v) = q \in Q$ und $l(v) = a \in \Sigma$ und $\kappa(v) = (v_1, ..., v_n)$. Dann gilt $\delta_n(q, a) = (\alpha(v_1), ..., \alpha(v_n))$.*

Die neue Norm SANTA enthält zwei Vorschriften:

Vorschrift 1 An einem Weihnachtsbaum dürfen an jedem Ast (hier definiert als Pfad von der Wurzel zu einem Blatt) höchstens drei Kerzen befestigt sein.

Vorschrift 2 Um ein Umkippen zu vermeiden, müssen Weihnachtsbäume symmetrisch sein. Das bedeutet, bei jeder Verzweigung müssen die beteiligten Unterbäume gleich hoch sein.

Lösen Sie nun die folgenden beiden Aufgaben.

(a) Geben Sie einen Baumautomaten über dem Alphabet

$\Sigma = \bigcup_{0 \leq i \leq 2} \Sigma_i,$ mit $\Sigma_0 = \{$  $\}, \Sigma_1 = \{$  ,  $\}, \Sigma_2 = \{$  $\}$

an, der genau die Bäume akzeptiert, die Vorschrift 1 einhalten.

(b) Ist das gewählte Automatenmodell Ihres Erachtens geeignet, um Vorschrift 2 zu prüfen? Geben Sie entweder einen Baumautomaten an, der genau die Bäume akzeptiert, die der Vorschrift 2 genügen, oder begründen Sie intuitiv, wieso es einen solchen nicht geben kann.

Aufgabe 6: Feedback keine Punkte

(a) Welche Aspekte der Veranstaltung *Theoretische Informatik* haben Ihnen bisher gut gefallen?

(b) Welche Aspekte der Veranstaltung *Theoretische Informatik* haben Ihnen bisher nicht gut gefallen?

Frohe Feiertage und ein gutes neues Jahr wünschen

Marc Fuchs, Matthias Heizmann, Thomas Lang, Jannis Limperg,
Alexander Nutz, Andreas Podelski, Christian Schilling und Michael Steinle.