ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. Andreas Podelski
Matthias Heizmann
Alexander Nutz
Christian Schilling

03.02.2015
Abgabe bis spätestens Montag 09.02.2015, 16 Uhr
in den Briefkästen in Gebäude 51

14. Übungsblatt zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Aufgabe 1: Reduktion 3 Punkte

Welche der folgenden Reduktionen gelten? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $SAT \leq H$

(b) $H \leq SAT$

(c) $SAT \leq_p H$

(d) $H \leq_p SAT$

Dabei ist H das allgemeine Halteproblem für Turingmaschinen und SAT das Erfüllbarkeitsproblem für Boolesche Ausdrücke in konjunktiver Normalform.

Aufgabe 2: Polynomielle Reduktion 3 Punkte

Das Hamiltonpfadproblem für *gerichtete* Graphen fragt wie das normale Hamiltonpfadproblem, ob es einen Rundweg durch den Graphen gibt, der jeden Knoten einmal besucht. Allerdings sind die Kanten gerichtet und dürfen nur in dieser Richtung durchlaufen werden, es sind also Einbahnstraßen.
Zeigen Sie: das Hamiltonpfadproblem für ungerichtete Graphen lässt sich auf das Hamiltonpfadproblem für gerichtete Graphen reduzieren, also

$$\text{Hamiltonscher Pfad} \leq_p \text{Gerichteter Hamiltonscher Pfad}.$$

Aufgabe 3: NP-Vollständigkeit 4 Punkte

Das NP-vollständige Problem HSet (Hitting-Set) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* Eine Menge M und eine Menge von Teilmengen $\mathcal{S}$ (d.h. $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq M$ für $i = 1, \ldots, n$) sowie eine natürliche Zahl $k \leq n$.
>
> *Frage:* Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq M$, sodass $|T| \leq k$ und $T \cap S_i \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots n$? (Mit anderen Worten: Gibt es eine höchstens k-elementige Teilmenge T, die mit jedem S_i mindestens ein gemeinsames Element hat?)

Das NP-vollständige Problem KNÜB (Knotenüberdeckung, bzw. VertexCover) ist wie folgt definiert.

> *Gegeben:* Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
>
> *Frage:* Besitzt G eine "überdeckende Knotenmenge" der Größe höchstens k? (Eine überdeckende Knotenmenge ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$.)

(a) Begründen Sie, warum HSET in NP liegt.

(b) Beweisen Sie, dass HSET NP-schwer ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass KNÜB NP-vollständig ist.

Es genügt, wenn Sie Ihre Laufzeitabschätzung grob begründen. Sie müssen weder Pseudocode noch Turingmaschinen explizit angeben.