§3 Kellerautomaten (S. 49-58)

Satz 3.6 Zu jeder kontextfreien Grammatik G kann man einen nichtdeterministischen Kellerautomaten $\mathcal{K}$ mit $L_\varepsilon(\mathcal{K}) = L(G)$ konstruieren.

Bew.: Sei $G = (N, T, P, S)$. Wir müssen einen PDA $\mathcal{K}$ konstruieren.
Bild mit Startkonfiguration, dann gemeinsam Weg finden:

- *Linksableitungen* in G simulieren
- Regelanwendung $A \to u$ wird im Keller nachvollzogen, indem das oberste Kellersymbol A durch u ersetzt wird.
- Terminalsymbol: mit Symbol des Eingabewortes vergleichen
- Akzeptanz mit leerem Keller
- Anwendung der Transitionen i.A. *nichtdeterministisch*
- einziger Zustand q spielt keine Rolle

$$\mathcal{K} = (T, \{q\}, N \cup T, \to, q, S, \emptyset),$$

wobei die Transitionsrelation $\to$ aus den folgenden Transitionstypen besteht:

$$\begin{array}{lll} (1) & (q, A) \xrightarrow{\varepsilon} (q, u), & \text{falls } A \to u \in P, \\ (2) & (q, a) \xrightarrow{a} (q, \varepsilon), & \text{falls } a \in T. \end{array}$$

Um zu zeigen, dass $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ gilt, untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Linksableitungen in G und Transitionsfolgen in $\mathcal{K}$ genauer. Dabei benutzen wir folgende Abkürzungen für Wörter $w \in (N \cup T)^*$:

- w_T = längstes Präfix von w mit $w_T \in T^*$,
- w_R ist der Rest von w, definiert durch $w = w_T w_R$.

Lemma 1 Für alle $A \in N, w \in (N \cup T)^*, n \geq 0$ und Linksableitungen

$$A \underbrace{\vdash_G \ldots \vdash_G}_{n \text{ Mal}} w$$

der Länge n gilt

$$(q, A) \stackrel{w_T}{\Longrightarrow} (q, w_R).$$

Beweis mit Induktion nach n:
<u>$n = 0$:</u> Dann ist $w = A$, also $w_T = \varepsilon$ und $w_R = A$. Trivialerweise gilt $(q, A) \stackrel{\varepsilon}{\Rightarrow} (q, A)$.

$\underline{n \to n+1}$: Wir analysieren den letzten Schritt einer Linksableitung der Länge $n+1$:

$$A \underbrace{\vdash_G \ldots \vdash_G}_{n \text{ Mal}} \tilde{w} = \tilde{w}_T B v \vdash_G \tilde{w}_T u v = w$$

für $B \in N$ und $u, v \in (N \cup T)^*$ mit $B \to u \in P$. Nach Induktions-Voraussetzung gilt

$$(q, A) \overset{\tilde{w}_T}{\Longrightarrow} (q, Bv).$$

Mit dem Transitionstyp (1) folgt

$$(q, Bv) \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} (q, uv).$$

Mit dem Transitionstyp (2) gilt außerdem

$$(q, uv) \overset{(uv)_T}{\Longrightarrow} (q, (uv)_R).$$

Da $w_T = (\tilde{w}_T uv)_T = \tilde{w}_T (uv)_T$ und $w_R = (\tilde{w}_T uv)_R = (uv)_R$ gilt, erhalten wir insgesamt

$$(q, A) \overset{w_T}{\Longrightarrow} (q, w_R).$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2 Für alle $A \in N, m \geq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T \cup \{\varepsilon\}, \gamma_0, \ldots, \gamma_m \in (N \cup T)^*$ und alle Transitionsfolgen

$$(q, A) = (q, \gamma_0) \xrightarrow{\alpha_1} (q, \gamma_1) \cdots \xrightarrow{\alpha_m} (q, \gamma_m)$$

der Länge m gilt

$$A \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_m \gamma_m.$$

Beweis mit Induktion über m:
$\underline{m = 0}$: Dann ist $\gamma_0 = A$. Trivialerweise gilt $A \vdash_G^* A$.
$\underline{m \to m+1}$: Wir analysieren die letzte Transition

$$(q, \gamma_m) \xrightarrow{\alpha_{m+1}} (q, \gamma_{m+1}).$$

Nach Induktions-Voraussetzung gilt $A \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_m \gamma_m$.
Fall $\alpha_{m+1} = \varepsilon$
Dann wurde Transitionstyp (1) angewandt und die Transition ist von der Form

$$(q, \gamma_m) = (q, Bv) \xrightarrow{\varepsilon} (q, uv) = (q, \gamma_{m+1})$$

für gewisse $B \in N$ und $u, v \in (N \cup T)^*$ mit $B \to u \in P$. Damit gilt

$$A \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_m B v \vdash_G \alpha_1 \ldots \alpha_m u v = \alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1} \gamma_{m+1}.$$

Fall $\alpha_{m+1} = a \in T$
Dann wurde Transitionstyp (2) angewandt und die Transition ist von der Form

$$(q, \gamma_m) = (q, av) \xrightarrow{a} (q, v) = (q, \gamma_{m+1})$$

für ein gewisses $v \in (N \cup T)^*$. Dann gilt

$$A \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_m av = \alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1} \gamma_{m+1}.$$

Damit ist auch Lemma 2 bewiesen.

Aus den Lemmata 1 und 2 folgt insbesondere, dass für alle Wörter $w \in T^*$ gilt:

$$\begin{array}{ll} S \vdash_G^* w & \text{gdw. } (q, S) \stackrel{w}{\Rightarrow} (q, \varepsilon) \\ & \text{gdw. } \mathcal{K} \text{ akzeptiert } w \text{ mit leerem Keller.} \end{array}$$

Also gilt $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ wie gewünscht.

Bsp.: Wir betrachten noch einmal die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir hatten bereits gesehen, dass die Sprache durch die kontextfreie Grammatik $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P_1, S)$, wobei P_1 aus den Produktionen

$$S \to \varepsilon \mid aSb$$

besteht, erzeugt wird: $L(G_1) = L$. Die im obigen Beweis benutzte Konstruktion liefert den Kellerautomaten

$$\mathcal{K}_1 = (\{a, b\}, \{q\}, \{S, a, b\}, \to, q, S, \emptyset),$$

wobei die Transitionsrelation $\to$ aus folgenden Transitionen besteht:

$$\begin{array}{lcl} (q, S) & \xrightarrow{\varepsilon} & (q, \varepsilon) \\ (q, S) & \xrightarrow{\varepsilon} & (q, aSb) \\ (q, a) & \xrightarrow{a} & (q, \varepsilon) \\ (q, b) & \xrightarrow{b} & (q, \varepsilon) \end{array}$$

Aus dem Beweis folgt: $L_\varepsilon(\mathcal{K}_1) = L(G_1)$. Zur Veranschaulichung sei die Transitionsfolge von $\mathcal{K}_1$ beim Akzeptieren von $a^2 b^2$ betrachtet:

$$\begin{array}{llllll} (q, S) & \xrightarrow{\varepsilon} & (q, aSb) & \xrightarrow{a} & (q, Sb) & \\ & \xrightarrow{\varepsilon} & (q, aSbb) & \xrightarrow{a} & (q, Sbb) & \\ & \xrightarrow{\varepsilon} & (q, bb) & \xrightarrow{b} & (q, b) \xrightarrow{b} (q, \varepsilon). & \end{array}$$

Jetzt konstruieren wir umgekehrt zu jedem gegebenen Kellerautomat eine passende kontextfreie Grammatik.

Satz 3.7 Zu jedem Kellerautomaten $\mathcal{K}$ kann man eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ konstruieren.
Bew.: Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, \rightarrow, q_0, Z_0, F)$. Wir konstruieren $G = (N, T, P, S)$ mit $T = \Sigma$ und

$$N = \{S\} \cup \{[q, Z, q'] \mid q, q' \in Q \text{ und } Z \in \Gamma\}.$$

Die Idee der Nichtterminalsymbole $[q, Z, q']$ ist wie folgt:

(1) Von $[q, Z, q']$ aus sollen in G alle Wörter $w \in \Sigma^*$ erzeugt werden, die $\mathcal{K}$ von der Konfiguration (q, Z) aus mit leerem Keller und dem Zustand q' akzeptieren kann: $(q, Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon)$.

(2) Eine Transition $(q, Z) \overset{\alpha}{\rightarrow} (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ von $\mathcal{K}$ wird deshalb in G durch folgende Produktionen nachgebildet:

$$[q, Z, r_k] \rightarrow \alpha[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k],$$

wobei die $r_1, \dots, r_k$ über ganz Q laufen. Von $[r_0, Z_1, r_1]$ aus werden die Wörter erzeugt, die von $\mathcal{K}$ bis zum Abbau des Symbols Z_1 akzeptiert werden, von $[r_1, Z_2, r_2]$ die Wörter, die von $\mathcal{K}$ bis zum Abbau des Symbols Z_2 akzeptiert werden, usw. Die Zwischenzustände $r_1, \dots, r_{k-1}$ sind diejenigen, die $\mathcal{K}$ unmittelbar nach dem Abbau der Symbole $Z_1, \dots, Z_{k-1}$ erreicht.

Genauer besteht P aus den folgenden Transitionen:

- **Typ (1):** $S \rightarrow [q_0, Z_0, r] \in P$ für alle $r \in Q$,
- **Typ (2):** Für jede Transition $(q, Z) \overset{\alpha}{\rightarrow} (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ mit $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $k \geq 1$ in $\mathcal{K}$:
  $[q, Z, r_k] \rightarrow \alpha[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \in P$ für alle $r_1, ..., r_k \in Q$.
- **Typ (3):** (Spezialfall von (2) für $k = 0$.) Für jede Transition $(q, Z) \overset{\alpha}{\rightarrow} (r_0, \varepsilon)$ in $\mathcal{K}$:
  $[q, Z, r_0] \rightarrow \alpha \in P$.

Um zu zeigen, dass $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ gilt, untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Ableitungen in G und Transitionfolgen in $\mathcal{K}$.

Lemma 1 Für alle $q, q' \in Q,\ Z \in \Gamma,\ w \in \Sigma^*,\ n \geq 1$ und Ableitungen in G

$$[q, Z, q'] \underbrace{\vdash_G \dots \vdash_G}_{\leq n \text{ Mal}} w$$

der Länge $\leq n$ gilt für $\mathcal{K}$

$$(q, Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q', \varepsilon).$$

Beweis mit Induktion über n:
$\underline{n=1}$: Aus $[q,Z,q'] \vdash_G w$ folgt wegen $w \in \Sigma^*$, dass es sich um den Produktionstyp (3) in G handelt. Daher gilt $w = \alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(q,Z) \overset{\alpha}{\to} (q',\varepsilon)$. Also $(q,Z) \overset{\alpha}{\Rightarrow} (q',\varepsilon)$.
$\underline{n \to n+1}$: Wir analysieren den ersten Schritt einer Ableitung der Länge $n+1$, der mit dem Produktionstyp (2) erfolgen muss:

$$[q,Z,r_k] \vdash_G \alpha\,[r_0,Z_1,r_1]\ldots[r_{k-1},Z_k,r_k] \underbrace{\vdash_G \ldots \vdash_G}_{n \text{ Mal}} \alpha\, w_1 \ldots w_k = w,$$

wobei $(q,Z) \overset{\alpha}{\to} (r_0,Z_1\ldots Z_k)$ in $\mathcal{K}$, $r_k = q'$, $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $w_1,\ldots,w_k \in \Sigma^*$ und

$$[r_{i-1},Z_i,r_i] \underbrace{\vdash_G \ldots \vdash_G}_{\leq n \text{ Mal}} w_i$$

für $i = 1,\ldots,k$ gilt. Nach Induktions-Voraussetzung gilt in $\mathcal{K}$

$$(r_{i-1},Z_i) \overset{w_i}{\Rightarrow} (r_i,\varepsilon)$$

für $i = 1,\ldots,k$ und daher mit dem Top–Lemma

$$\begin{array}{rcl} (q,Z) \overset{\alpha}{\to} \; (r_0,Z_1\ldots Z_k) & \overset{w_1}{\Rightarrow} & (r_1,Z_2\ldots Z_k) \\ & \vdots & \\ (r_{k-1},Z_k) & \overset{w_k}{\Rightarrow} & (r_k,\varepsilon). \end{array}$$

Also insgesamt $(q,Z) \overset{w}{\Rightarrow} (q',\varepsilon)$ für $\mathcal{K}$ wie gewünscht.

Lemma 2 Für alle $q,q' \in Q$, $Z \in \Gamma$, $n \geq 1$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und alle Transitionsfolgen

$$(q,Z) \overset{\alpha_1}{\to} \circ \cdots \circ \overset{\alpha_n}{\to} (q',\varepsilon)$$

in $\mathcal{K}$ der Länge n gilt in G

$$[q,Z,q'] \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_n.$$

Beweis mit Induktion über n:
$\underline{n=1}$: Dann gilt $(q,Z) \overset{\alpha_1}{\to} (q',\varepsilon)$. Nach Definition von P in G — siehe Produktionstyp (3) — folgt $[q,Z,q'] \vdash_G \alpha_1$.
$\underline{n \to n+1}$: Wir analysieren den ersten Schritt einer Transitionsfolge in $\mathcal{K}$ der Länge $n+1$:

$$(q,Z) \overset{\alpha_1}{\to} (r_0,Z_1\ldots Z_k) \overset{\alpha_2}{\to} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n+1}} (q',\varepsilon),$$

wobei $k \geq 1$ gilt. Nach Definition von P gibt es in G eine Produktion vom Typ (2)

$$[q, Z, q'] \to \alpha_1 [r_0, Z_1, r_1] \cdots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

mit $r_k = q'$. Wir betrachten den sukzessiven Abbau des Kellerinhalts $Z_1 \dots Z_k$ von $\mathcal{K}$ genauer. Dazu gibt es in $\mathcal{K}$ Transitionsfolgen

$$\begin{array}{l} (r_0, Z_1) \xrightarrow{\alpha_{11}} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{1m_1}} (r_1, \varepsilon) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_{k-1}, Z_k) \xrightarrow{\alpha_{k1}} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{km_k}} (r_k, \varepsilon) = (q', \varepsilon) \end{array}$$

mit $\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} = \alpha_{11} \dots \alpha_{1m_1} \dots \alpha_{k1} \dots \alpha_{km_k}$ und $m_1, \dots, m_k \leq n$. Nach Induktions-Voraussetzung gilt in G

$$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \vdash_G^* \alpha_{i1} \dots \alpha_{im_i}$$

für $i = 1, \dots, k$. Insgesamt ergibt sich in G

$$[q, Z, q'] \vdash_G^* \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}$$

wie gewünscht.

Aus den Lemmata 1 und 2 folgt: für alle $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$ gilt in G

$$S \vdash_G [q_0, Z_0, q] \vdash_G^* w$$

gdw. in $\mathcal{K}$

$$(q_0, Z_0) \stackrel{w}{\Rightarrow} (q, \varepsilon)$$

gilt. Damit haben wir insgesamt $L(G) = L_\varepsilon(\mathcal{K})$ gezeigt.