Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Christian Schilling

Abgabe: 15. Dezember 2017

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Aufgabe 1: Mehr Keller – mehr Möglichkeiten 3 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ ein beliebiger Kellerautomat. Lemma 4.2 aus der Vorlesung besagt:

> Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
>
> Wenn $(q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$, dann $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$.

Beweisen Sie dieses Lemma.

Hinweis: Es ist leichter, die folgende allgemeinere Behauptung zu zeigen.

> Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, \hat{\gamma} \in \Gamma^*$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
>
> Wenn $(q, w, \hat{\gamma}) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$, dann $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, \hat{\gamma}\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$.

Aufgabe 2: Mehr Keller – mehr Möglichkeiten „umgedreht“ 1 Punkt

Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ ein beliebiger Kellerautomat. Wenn wir die Implikation in Lemma 4.2 umdrehen, lautet die Aussage:

> Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
>
> Wenn $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$, dann $(q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$.

Gilt diese Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: CFG $\rightsquigarrow$ NPDA 2 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$ und den folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} P = \{&S \to Aa \mid Bc, \\ &A \to aaAb \mid a, \\ &B \to aBb \mid aA \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

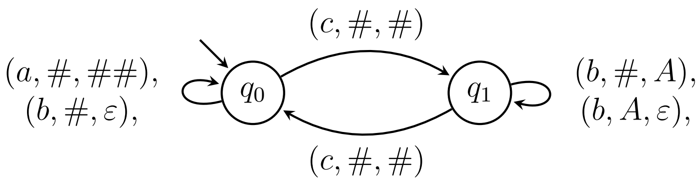
(a) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, sodass $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{G})$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren[1] (Lemma 4.1).

(b) Geben Sie eine akzeptierende Folge von Konfigurationen in Ihrem Kellerautomaten für das Wort *aaabc* an.

[1] Die Konstruktion wurde in der Vorlesung auf Grammatiken in CNF beschränkt, um den Beweis zu vereinfachen. Die Konstruktion funktioniert aber auch für allgemeine kontextfreie Grammatiken. Sie müssen die Grammatik daher nicht erst in CNF bringen.

Aufgabe 4: NPDA $\rightsquigarrow$ CFG 3 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomat $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q_0, \#, \delta)$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, A\}$ und den restlichen Komponenten gegeben im folgenden Zustandsdiagramm.



(a) Geben Sie eine Grammatik $\mathcal{G}$ an, sodass $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{K})$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren (Lemma 4.4).

(b) Geben Sie eine Ableitung für das Wort *acbbcb* in Ihrer Grammatik an.

Aufgabe 5: Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen 4 Punkte

Wir definieren einen *Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen* als 7-Tupel

$$\mathcal{E} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta, F)$$

mit den Komponenten $\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta$ wie für einen gewöhnlichen Kellerautomaten und $F \subseteq Q$ als die Menge der akzeptierenden Zustände.

Weiterhin definieren wir das Akzeptanzverhalten folgendermaßen:

Eine Konfiguration (q, w, γ) eines Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen ist *akzeptierend*, falls $q \in F$ und $w = \varepsilon$. Die von einem Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}$ *akzeptierte Sprache* ist

$$L(\mathcal{E}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \gamma \in \Gamma^* : (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \rhd^* (q, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Hierbei ist $\rhd$ die Schrittrelation genau wie für gewöhnliche Kellerautomaten.

Geben Sie für die folgenden Behauptungen jeweils eine Konstruktion (ohne Beweis) an:

(a) Für jeden gewöhnlichen Kellerautomaten $\mathcal{K}$ gibt es einen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}$, welcher die gleiche Sprache akzeptiert.

(b) Für jeden Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}$ gibt es einen gewöhnlichen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, welcher die gleiche Sprache akzeptiert.