Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Christian Schilling

Abgabe: 9. Februar 2018

14. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Aufgabe 1: Eigenschaften der Reduktionsrelation 2 Punkte

Beweisen Sie die folgende Aussage.

Die Reduktionsrelation $\preceq_p$ ist reflexiv und transitiv.

Aufgabe 2: $\mathsf{SAT} \in \mathsf{P}$ **?** 1 Punkt

Während der Erstellung der Aufgaben ist uns folgender Algorithmus eingefallen, der SAT in quadratischer Zeit löst und damit zeigt, dass $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ gilt. Gegeben sei eine boolesche Formel F mit den Variablen $x_1, \ldots, x_k$. Offensichtlich ist $k \leq |F|$.

1. Wir reduzieren das Problem, ob F erfüllbar ist, auf ein einfacheres Problem mit der Formel $F^{(1)}$, die $k-1$ Variablen enthält. Die Reduktion ersetzt jedes Vorkommen von x_k in F einmal durch 0 und einmal durch 1:

$$F^{(1)} = F[x_k := 0] \vee F[x_k := 1]$$

   Der Algorithmus lässt sich auf einer Zweibandturingmaschine in $3 \cdot |F| + c$ Schritten durchführen, wobei c eine kleine Konstante ist. Insgesamt ist die Reduktion in $O(n)$. Außerdem ist $F^{(1)}$ genau dann erfüllbar, wenn F erfüllbar ist.

2. Wir wiederholen den ersten Schritt k Mal, bis wir eine Formel $F^{(k)}$ erhalten, die keine Variablen mehr enthält. Der Algorithmus hat Laufzeit $k \cdot O(n)$, also $O(n^2)$.

3. Im letzten Schritt berechnen wir den Wahrheitswert von $F^{(k)}$. Weil die Formel keine Variablen mehr enthält, ist das in linearer Zeit möglich. Der gesamte Algorithmus hat also Zeitkomplexität $O(n^2 + n) = O(n^2)$.

Erklären Sie *kurz*, wo der Fehler liegt.

Aufgabe 3: Reduktion 2 Punkte

Welche der folgenden Reduktionen gelten? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $SAT \preceq H$

(b) $H \preceq SAT$

(c) $SAT \preceq_p H$

(d) $H \preceq_p SAT$

Dabei ist H das allgemeine Halteproblem für Turingmaschinen und SAT das Erfüllbarkeitsproblem für Boolesche Ausdrücke in konjunktiver Normalform.

Aufgabe 4: Polynomielle Reduktion 3 Punkte

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Ein Hamiltonpfad in G ist ein Pfad, der jeden Knoten in V genau einmal besucht.

Das Problem GHP (gerichteter Hamiltonpfad) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$.
>
> *Frage:* Besitzt G einen gerichteten Hamiltonpfad?

Das Problem UHP (ungerichteter Hamiltonpfad) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
>
> *Frage:* Besitzt G einen ungerichteten Hamiltonpfad?

Zeigen Sie: Das Hamiltonpfadproblem für ungerichtete Graphen lässt sich polynomiell auf das Hamiltonpfadproblem für gerichtete Graphen reduzieren, also

$$\textsc{Uhp} \preceq_p \textsc{Ghp}.$$

Es genügt, wenn Sie Ihre Laufzeitabschätzung grob begründen. Sie müssen weder Pseudocode noch Turingmaschinen explizit angeben.

Aufgabe 5: NP-Vollständigkeit 4 Punkte

Das Problem HSET (Hitting Set) ist wie folgt definiert:

> *Gegeben:* Eine Menge M und eine Menge von Teilmengen $\mathcal{S}$ (d.h. $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq M$ für $i = 1, \ldots, n$) sowie eine natürliche Zahl $k \leq n$.
>
> *Frage:* Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq M$, sodass $|T| \leq k$ und $T \cap S_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n$? Mit anderen Worten: Gibt es eine höchstens k-elementige Teilmenge T, die mit jedem S_i mindestens ein gemeinsames Element hat?

Das NP-vollständige Problem KNÜB (Knotenüberdeckung bzw. Vertex Cover) ist wie folgt definiert.

> *Gegeben:* Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$.
>
> *Frage:* Besitzt G eine „überdeckende Knotenmenge“ der Größe höchstens k? Eine überdeckende Knotenmenge ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$.

(a) Begründen Sie, warum HSET in NP liegt.

(b) Beweisen Sie, dass HSET NP-vollständig ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass KNÜB NP-vollständig ist.

Es genügt, wenn Sie Ihre Laufzeitabschätzung grob begründen. Sie müssen weder Pseudocode noch Turingmaschinen explizit angeben.